

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Um breve estudo sobre o conceito e o cálculo de áreas de figuras planas.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Luiz Carlos Dantas Santos

Orientador: Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão, 2019.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Santos, Luiz Carlos Dantas
S237b Um breve estudo sobre o conceito e o cálculo de áreas de
figuras planas / Luiz Carlos Alves Santos ; orientador Zaqueu
Alves Ramos. - São Cristóvão, 2019.
64 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional em Matemática) –
Universidade Federal de Sergipe, 2019.

1. Matemática. 2. Superfícies (Matemática). 3. Polígonos. 4.
Dimensões. 5. Curvas. I. Ramos, Zaqueu Alves Ramosb orient.
II. Título.

CDU 514.112



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA


Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.


**Um breve estudo sobre o conceito e o cálculo de áreas de
figuras planas**

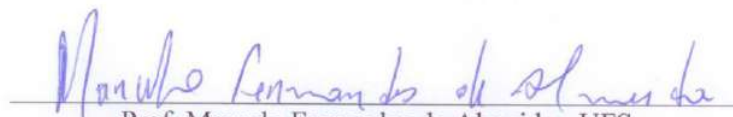
por

Luiz Carlos Dantas Santos

Aprovada pela banca examinadora:


Prof. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Orientador


Prof. André Vinicius Santos Dória - UFS
Primeiro Examinador


Prof. Marcelo Fernandes de Almeida - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 17 de Maio de 2019

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por tudo!

À minha mãe Cordélia, irmãos, Fernando, Priscila e Moema, por todo apoio e palavras de estímulo e motivação. À minha esposa Marília, que acompanhou todo o processo e, em especial, ao pequeno Joaquim, que mesmo sem saber foi o meu maior incentivador, meus ternos agradecimentos.

Também aos professores do curso, por todo conhecimento transmitido, ao professor Zaqueu pelas orientações para a realização da dissertação, a todos os colegas do curso que estiveram junto a mim durante todo o percurso, colaborando de forma significativa sempre estimulando, cooperando e a todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a conclusão de mais essa etapa, agradecimentos sinceros.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo realizado sobre o conceito e o cálculo de áreas de figuras planas. Para tal foi realizado um levantamento histórico acerca do desenvolvimento da ideia de área, bem como a definição precisa do que vem a ser a área de uma região plana. Além disso, procuramos expor as demonstrações das relações que são utilizadas para determinar áreas dos polígonos elementares (quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, losango e trapézio) e também do círculo, onde buscamos apresentar uma sondagem histórica desde a descoberta do número π , até as relações de perímetro e área. Incluímos também a noção do cálculo de áreas de regiões curvilíneas por meio do Cálculo Diferencial e Integral, o qual é o método mais indicado para tratar sobre áreas de superfícies planas delimitadas por curvas. Do mesmo modo, dissertamos acerca do *Teorema de Pick* e do *Teorema do Cadarço (Shoelace Theorem)*, os quais não são muito utilizados de forma genérica nos níveis fundamental e médio, contudo podem ser ministrados no ensino básico de matemática, de forma a enriquecer os conhecimentos sobre métodos para determinar áreas de polígonos. Finalizamos o estudo discorrendo sobre equidecomponibilidade entre polígonos, que versa sobre decompor um dado polígono P em figuras menores e por meio de um rearranjo dessas peças, obter um outro polígono Q e também apresentamos o Teorema de *Bolyai-Gerwien*, que trata, em linhas gerais, sobre equivalência entre polígonos que apresentam áreas iguais.

Palavras Chave: Área, figuras planas, polígonos, equivalência.

Abstract

This paper aims at presenting a study about the concept and calculation of flat figures areas. For such, it was carried out a historical survey about the development of the idea of area, as well as the precise definition of what could be the area of a flat region. In addition, we seek to show demonstrations of the relationships that are used to determine elementary polygons areas (square, rectangle, parallelogram, triangle, diamond and trapezoid) and also of a circle, where we have tried to present a historical survey since the discovery of the number π to the perimeter and area relationships. We have also included the notion of areas of curvilinear regions areas calculations by means of Differential and Integral Calculus, which is the most suitable method for dealing with flat surfaces areas delimited by curves. In the same way, we discoursed about the *Pick Theorem* and the *Shoelace Theorem*, which are not widely used at elementary and highschool, however, they can be taught in basics mathematics education, in order to enrich knowledge about the methods for determining polygons areas. We finished the study by discussing equidecomponibility between polygons, which involves decomposing a given polygon P into smaller figures, and by means of a rearrangement of these pieces, to obtain a polygon Q . We also present the *Bolyai-Gerwien's Theorem*, which deals, in general terms, with equivalence between polygons with the same areas.

Keywords: Area, flat regions, polygons, equivalence.

Sumário

1	Área	10
1.1	A noção de área e o surgimento da geometria.	10
1.2	Definição de área	12
1.3	Cálculo de áreas de figuras elementares	15
1.3.1	A área do quadrado	15
1.3.2	A área do retângulo	18
1.3.3	A área do paralelogramo	19
1.3.4	A área do triângulo	20
1.3.5	A área do losango	21
1.3.6	A área do trapézio	22
1.4	A Área do Círculo	23
2	Cálculo de áreas de polígonos	31
2.1	O cálculo de áreas de polígonos do ponto de vista da Geometria Analítica	31
2.2	O Teorema de <i>Pick</i> - Um modo notável para calcular áreas de polígonos	35
3	Áreas após o surgimento do Cálculo	43
3.1	Área de regiões curvilíneas	43
3.2	A Integral Definida	50
3.3	Aplicações de integração	53
3.3.1	Áreas entre curvas	53
4	O Teorema de Bolyai-Gerwien	56
4.1	Equidecomponibilidade	56
4.2	Teorema de Bolyai-Gerwien	58

Introdução

A geometria plana, também chamada geometria euclidiana, em homenagem ao geômetra Euclides de Alexandria, é o segmento da matemática que trata dos conceitos, construções, propriedades, formas, perímetro e área de figuras bidimensionais. O seu estudo é fundamental, devido a sua importância na cultura, história, desenvolvimento de habilidades cognitivas, além da relevância para o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, por parte do educando.

A percepção de elementos geométricos no cotidiano, se faz de forma clara e objetiva, dessa forma, a geometria vem a ser uma importante ferramenta para o homem, podendo os saberes geométricos, ser aplicáveis em diversos ramos do conhecimento.

O presente trabalho tem por objetivo fazer uma abordagem sobre o cálculo de áreas de regiões planas, como também tratar sobre equivalência entre polígonos que possuem áreas iguais. Delimitamos o estudo em quatro capítulos, onde o primeiro inicia com um levantamento histórico sobre a noção de área de figuras planas, seguindo com a definição precisa de área de regiões planas e das demonstrações das relações que determinam a área dos polígonos elementares. Fizemos também um apanhado histórico sobre a descoberta do número π , além da demonstração da fórmula que nos fornece a área do círculo,

No capítulo 2 desenvolvemos um estudo sobre o cálculo de áreas de polígonos em geral, apresentando duas maneiras muito interessantes para serem mostradas e aplicadas nas séries de ensino médio e até de ensino fundamental, pois o seu uso não é muito frequente nos níveis de ensino mencionados. Trata-se do *Teorema do Cadarço (Shoelace Theorem)* e do *Teorema de Pick*, os quais se ministrados nos níveis de ensino citados, podem aumentar a gama de conhecimento dos educandos, além de possibilitar uma maior argumentação para resolução de questões no cotidiano escolar.

No terceiro capítulo explanamos sobre como determinar áreas após o surgimento do Cálculo Diferencial Integral, o qual é o método por excelência para determinar áreas de regiões delimitadas por curvas. Tratamos inicialmente de áreas como o limite de uma soma de áreas infinitamente pequenas, o que representa uma *soma de Riemann*, depois enunciamos a definição de *Integral Definida*, seguindo com o *Teorema Fundamental do Cálculo* e uma das suas aplicações, que é o cálculo de áreas.

O capítulo 4 trata sobre equidecomponibilidade (decomposição e composição de polígonos) e do *Teorema de Bolyaia-Gerwien*, que trata sobre equivalência entre polígonos que possuem áreas iguais, de um modo geral, dois polígonos P e Q são equidecomponíveis, se é possível decompor uma das figuras em um número finito de polígonos e por meio de um rearranjo dos mesmos, compor a outra figura, dessa forma, se duas figuras são equidecomponíveis, então elas possuem a mesma área, reciprocamente se dois polígonos P e Q possuem a mesma área, então eles são equidecomponíveis. Esse enunciado é propriamente o *Teorema de Bolyai-Gerwien*, sua demonstração encontra-se no quarto capítulo.

Capítulo 1

Área

Esse capítulo irá tratar sobre áreas das figuras geométricas elementares, as quais nos dão todo o embasamento para cálculo de áreas de regiões planas como um todo. Apresentaremos alguns registros históricos sobre o desenvolvimento da noção e do cálculo de áreas realizados por civilizações mais antigas, bem como uma definição formal para área, além da comprovação das relações utilizadas para o cálculo de áreas de triângulos, quadriláteros e do círculo.

1.1 A noção de área e o surgimento da geometria.

Os primórdios da matemática, sejam em aritmética ou geometria, são mais antigos que as mais antigas civilizações. Estudos, análises e conclusões dependem de interpretações baseadas na matemática encontrada a partir de documentos que sobreviveram. As origens mais antigas de que se tem registro são das civilizações egípcia e babilônica. Porém acredita-se que a geometria que tinham em mente possuía raízes mais antigas. A matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver. Nas civilizações do Oriente Antigo, originou-se primordialmente como uma ciência prática para assistir atividades ligadas à agricultura e à engenharia. É importante ressaltar que nenhum exemplo do que hoje chamamos de demonstração pode ser encontrado na matemática oriental antiga.

No Egito, o desenvolvimento da geometria pode ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras devido à precisão de fazer novas medidas a cada inundação anual no vale do rio Nilo. Acredita-se também na existência de uma classe sacerdotal, a qual conduziu o estudo da geometria.

Muitas informações sobre a matemática egípcia foram obtidas através de papiros, os mais famosos são Rhind ou Ahmes, Kahun, Berlin, Golonishev ou Moscou. Os papiros Moscou e Rhind apresentam juntos, 110 problemas, dos quais, vinte e seis são geométricos. Em se tratando do cálculo de áreas de polígonos, esse é um problema apreciado desde os tempos remotos, por

exemplo, o problema 51 do papiro Ahmes mostra que a área de um triângulo isósceles era obtida tomando a metade do que chamamos de base e multiplicando essa medida pela altura. Ahmes justifica seu método para determinar a área, sugerindo que um triângulo isósceles pode ser visto como dois triângulos retângulos iguais, podendo ser deslocados, de modo a formar um retângulo. Podemos já notar o início de uma teoria de congruência e a ideia de prova em geometria. Um documento de Edfu (cidade no Egito, atual Tell Edfu) de cerca de 1500 anos depois de Ahmes, apresenta exemplos de triângulos, trapézios, retângulos e quadriláteros mais gerais, onde para determinar a área de um quadrilátero, efetua-se o produto das médias aritméticas dos lados opostos, uma maneira equivocada, também para o triângulo, onde efetua-se o produto da metade da soma de dois lados pela metade do terceiro lado.

O papiro Moscou apresenta, referente ao problema 14, dados onde pode-se concluir que se trata da determinação do volume de um tronco de pirâmide quadrada, o qual é realizado com um procedimento semelhante à fórmula moderna $V = h(a^2 + ab + b^2)/3$, onde a e b são os lados das bases do tronco, consequentemente pode-se obter o volume de uma pirâmide, basta tomar $b = 0$. Não se sabe como os egípcios chegaram ao resultado. Supõe-se para a regra do volume de uma pirâmide uma origem empírica, já para o tronco podem tê-lo dividido em paralelepípedos, prismas e pirâmides, substituído os prismas e pirâmides por blocos retangulares e assim, agrupando os blocos de maneira conveniente, ter obtido a fórmula. O problema 10 do papiro Moscou apresenta uma questão sobre a área de uma superfície com diâmetro $4\frac{1}{2}$. Não se sabe ao certo a que superfície se referia, pode ter sido um cesto, ou um hemisfério, o fato é que parece ser uma estimativa primitiva da área de uma superfície curva.

Muitos dos vinte e seis problemas dos papiros Moscou e Rhind decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras e volumes. Investigações recentes parecem mostrar que os egípcios tinham conhecimento que a área de um triângulo qualquer é o semiproduto da base pela altura. É notável também, a existência no papiro Moscou, de um exemplo correto da fórmula do volume do tronco de pirâmide de bases quadradas. Então, podemos notar que desde essa época já existia um interesse pela busca de relações entre figuras geométricas. Contudo, não se conhecem teoremas ou demonstrações formais na matemática egípcia, mas algumas comparações geométricas sobre perímetro e área de círculos e quadrados, estão entre as primeiras afirmações precisas da história, referente à figuras geométricas.

Como no Egito, também havia no vale mesopotâmico uma civilização (as civilizações antigas da Mesopotâmia são comumente chamadas de babilônicas), os sumérios (primeiro povo a habitar a região da Mesopotâmia) tinham construído casas e templos decorados com cerâmica e mosaicos artísticos em desenhos geométricos. A uns trezentos quilômetros da Babilônia, em 1936, em Susa, foi encontrado um grupo de tabletas apresentando resultados geométricos significativos. Uma das tabletas compara os lados e os quadrados dos lados de polígonos regulares de três, quatro, cinco,

seis e sete lados. Na mesma tableta é encontrada a razão entre o perímetro de um hexágono e o comprimento do círculo circunscrito, assim, essa tableta é um bom exemplo de comparação sistemática de figuras geométricas, mas é importante ressaltar que não se sabe realmente se os babilônios tinham ou não o conceito de figuras semelhantes.

A geometria para os mesopotâmios não era uma disciplina matemática no nosso sentido, mas uma espécie de álgebra ou aritmética aplicada em que números são ligados a figuras. Medidas eram o ponto central da geometria algebrizada do vale da mesopotâmia. A geometria babilônica relaciona-se inteiramente com a mensuração prática. Do que já foi descoberto, pôde-se concluir que os babilônios deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (talvez da área de um triângulo genérico), da área do trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo retângulo e do volume de um prisma reto trapezoidal. Já o volume de um tronco de cone e o de um tronco de pirâmide quadrangular regular eram calculados de forma equivocada como o produto da altura pela semissoma das bases.

Além de todo esse conhecimento, algumas tabletas mostram que o teorema de Pitágoras era amplamente utilizado e não se limitava ao caso do triângulo retângulo e também dominavam o fato de que um ângulo inscrito num semicírculo é reto. Já foram escavadas, desde o século XIX, mais de meio milhão de tábulas, quase 400 foram identificadas como estritamente matemáticas, constituídas de listas de problemas matemáticos, essas tabletas não apresentam formulações gerais, porém, um estudo posterior supõe que centenas de problemas semelhantes em tabletas parecem ser exercícios que os escolares deviam resolver de acordo com certos métodos ou regras, então, mesmo não existindo os enunciados dessas regras, não podemos concluir que a generalidade não fizesse parte do pensamento antigo.

1.2 Definição de área

Nessa seção iremos tratar sobre áreas de figuras geométricas, de modo a procurar definir, de maneira precisa, o que é a área de uma região plana e como determinar essa medida. Em seguida, vamos concentrar o estudo em áreas de polígonos, procurando também demonstrar as relações que determinam a área de algumas figuras. Além dos polígonos, trataremos do círculo e nesse ponto faremos uma abordagem histórica sobre a descoberta do número π , assim como da relação para calcular sua área, além da demonstração da mesma.

Para tentarmos obter uma definição sobre a noção de área, devemos, antes de tudo, especificar quais os objetos geométricos adequam-se a tal definição. Procuraremos enquadrar nossa argumentação a subconjuntos do plano. Tais subconjuntos são regiões delimitadas por uma ou diversas curvas fechadas simples. Sendo uma curva fechada, aquela que não possui extremidades.



Curva aberta



Curva fechada

Uma curva é dita simples quando não apresenta pontos de auto interseção.



Curva fechada simples



Curva fechada não simples

Perceba que a definição de curva simples não está relacionada com a complexidade do traço da mesma. Toda curva fechada simples possui uma importante propriedade, a qual é expressa no teorema a seguir:

Teorema 1.2.1 (Jordan). *Uma curva fechada simples divide o plano em duas regiões disjuntas.*

Ou seja, o plano é dividido em duas regiões que se complementam, onde uma é limitada e a outra ilimitada. O traço da curva é a fronteira, comum entre as duas regiões. O teorema foi proposto pelo matemático francês Camille Jordan, porém foi demonstrado pela primeira vez, de forma correta, por Oswald Veblen em 1905. A demonstração desse teorema não será apresentada pois a mesma necessita de conhecimentos que fogem ao propósito desse trabalho. A mesma pode ser encontrada no livro *Topology, 2nd Edition*, James Munkres, Massachusetts Institute of Technology.

Podemos assim, como consequência do teorema acima, que possui um forte apelo intuitivo, nos referir de forma indubitável a qual região estaremos atribuindo um valor de área, que será a região interna à curva, a qual é limitada. Além disso, iremos considerar que duas regiões são congruentes, se elas possuírem a mesma forma e tamanho. Então, qualquer referência feita a uma curva, entenda-se, a menos que se diga o contrário, que a curva é fechada e simples. Conseguimos, dessa forma, definir o que vem a ser uma área.

Definição 1.2.2. A área de uma região S delimitada por uma ou diversas curvas é um número real positivo $A(S)$, satisfazendo as seguintes condições:

1. Duas regiões congruentes possuem a mesma área.

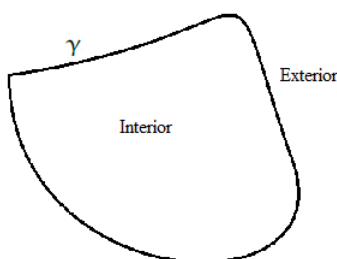
2. Se duas regiões S_1 e S_2 se intersectarem no máximo por pontos em sua fronteira, isto é, sua intersecção não possui pontos interiores, então

$$A(S_1 \cup S_2) = A(S_1) + A(S_2)$$

3. A área de um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento é igual a uma unidade de área.

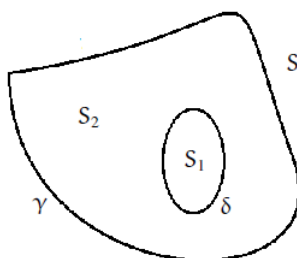
Observação 1.2.3. A noção de congruência é a forma mais exata de dizermos que duas figuras são iguais.

Considerando uma curva γ , sabemos que essa curva divide o plano em duas regiões distintas. Estabelecendo o sentido anti-horário como orientação, a região da curva que se encontra à esquerda da mesma será chamada interior, consequentemente, a região a sua direita será chamada exterior.



Proposição 1.2.4. A área de uma figura é sempre maior que a área de qualquer figura contida em seu interior.

Prova. Considere uma figura S delimitada por uma curva γ e seja uma curva δ contida no interior de S . Podemos assim, definir duas regiões, uma região S_1 delimitada por δ e outra região S_2 , delimitada pelas curvas γ e δ .



De acordo com o segundo item da definição de área, temos que a área de S é igual à soma das áreas de S_1 e S_2 . Assim, a área de S será maior que qualquer uma das regiões S_1 ou S_2 . \square

Da definição de área, observamos que para determinar a área de uma figura complexa, podemos decompor a mesma em figuras mais simples, as quais saibamos calcular suas respectivas áreas. Com isso, a área total, ou seja, a área da região inicial será igual à soma das áreas das regiões parciais, podemos assim afirmar que a área é uma grandeza aditiva.

Dessa forma, podemos concluir que se duas figuras tiverem algum ponto da sua região interior em comum, a área da união entre essas duas figuras será menor que a soma das áreas de cada uma das figuras individuais. Essa diferença ocorre devido ao fato de que se as regiões interiores das duas figuras possuírem algum ponto em comum, existe algum setor que contém esse ponto na interseção entre as figuras. Com isso, efetuando a soma das áreas das figuras, a área do setor comum será contada duas vezes, ao passo que para a área da união será computada apenas uma vez.

1.3 Cálculo de áreas de figuras elementares

Quando pensamos em medir algo, isso nos remete à ideia de comparar. Então, para determinar a medida de qualquer grandeza, devemos compará-la com outra de mesma natureza adotada como unidade de medida.

Em se tratando da área de uma figura plana, que representa a região do plano delimitada pela figura, essa para ser determinada deve ser comparada com outra figura, que será um quadrado de lado 1 o qual é definido como a unidade de medida. Como já foi dito, área de uma figura é sempre representada por um número real, esse corresponde à quantidade de vezes que a unidade cabe em tal figura.

Vamos a partir de agora, demonstrar as relações que são utilizadas para determinar as áreas dos polígonos essenciais para o estudo e desenvolvimento da geometria desde as séries iniciais do ensino básico, ou seja, quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, losango e trapézio.

1.3.1 A área do quadrado

Iniciaremos nosso estudo provando a regra que determina a área do quadrado, quadrilátero cujos lados possuem o mesmo comprimento e os ângulos apresentam medidas iguais, no caso do quadrado, os quatro ângulos são retos.

Para demonstrar que a área do quadrado é obtida através do quadrado da medida do seu lado, devemos verificar se essa relação é válida para qualquer número real. Utilizaremos para tal, a definição de área, além de operações e alguns conceitos, proposições sobre números reais.

Em certo momento do nosso estudo, os resultados a seguir serão necessários para que possamos concluir a demonstração da área do quadrado. As demonstrações dos mesmos podem ser encontradas no livro Curso de Análise Volume 1, de Elon Lages Lima. Dessa forma, temos:

Lema 1.3.1. *Dados dois números reais positivos x e y , temos que $x < y$ se, e somente se $x^2 < y^2$.*

Lema 1.3.2. *Dados dois números reais x e y sempre existe um número racional entre eles.*

Lema 1.3.3. *Dado um número real positivo a existe um único número real positivo b tal que $b^2 = a$. Este número é denominado raiz quadrada de a , denotado por \sqrt{a} .*

Faremos agora a demonstração da relação que nos indica a medida da área de um quadrado.

Teorema 1.3.4. *A área de um quadrado de lado a é igual a a^2 .*

Prova. Considerando um quadrado cujo lado possui uma medida inteira n , podemos subdividir seus lados em n segmentos de comprimento unitário. Assim, teremos um total de n^2 quadrados de lado unitário. Então de acordo com a definição de área, podemos concluir que a área do quadrado $A(Q)$ cujo lado possui medida inteira é igual a

$$A(Q) = n^2 \cdot 1 = n^2,$$

pois corresponde à soma das áreas dos n^2 quadrados de lado 1, em que o quadrado inicial foi dividido, e cada um dos n^2 quadrados tem área igual a uma unidade de área.

Suponhamos agora um quadrado cuja medida do lado seja um número racional $\frac{m}{n}$. Obviamente é impossível dividir este quadrado em um número inteiro de quadrados de lado unitário. Para podermos comparar o quadrado unitário e o quadrado em questão, deve ser utilizada uma nova medida como padrão. Imaginemos um quadrado λ cujo lado mede $\frac{1}{n}$. Agindo de modo análogo ao anterior, podemos notar que um quadrado de lado unitário pode ser dividido em n^2 quadrados de lado medindo $\frac{1}{n}$, ou seja, congruentes a λ , para isso, basta dividir cada lado do quadrado unitário em n segmentos. Assim, teremos, de acordo com a definição de área

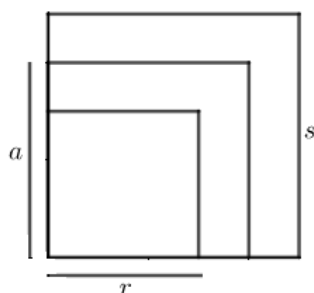
$$n^2 \cdot A(\lambda) = 1 \implies A(\lambda) = \frac{1}{n^2}.$$

Aplicando procedimento similar, percebe-se que um segmento de medida $\frac{m}{n}$ pode ser decomposto em m segmentos de medida $\frac{1}{n}$. Então um quadrado Q de lado $\frac{m}{n}$ pode ser dividido em m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$. Cada quadrado de lado $\frac{1}{n}$ tem área medindo $\frac{1}{n^2}$, conforme visto anteriormente. Dessa forma, como o quadrado Q de lado $\frac{m}{n}$, foi dividido em m^2 quadrados, todos com área medindo $\frac{1}{n^2}$ podemos afirmar que Q apresenta área igual a

$$A(Q) = m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Devemos agora mostrar que o resultado também é válido para um quadrado cujo lado possui medida irracional. Para isso vamos utilizar algumas propriedades dos números reais, nos referimos aos Lemas apresentados no início da seção.

Admitindo um número irracional α , temos como consequência do Lema 1.3.2, que podemos encontrar tão próximos quanto quisermos de α , números racionais r e s , tais que $r < \alpha < s$. Então, um quadrado de lado cuja medida é um número irracional α estará sempre no interior de um quadrado de lado racional s e em seu interior haverá sempre um quadrado de lado racional r , dos quais as áreas são respectivamente s^2 e r^2 , conforme figura a seguir.



Sendo Q o quadrado de lado com medida α , denotaremos a área de Q por $A(Q)$, assim $r^2 < A(Q) < s^2$. De acordo com o Lema 1.3.1, podemos afirmar que $r^2 < \alpha^2 < s^2$, uma vez que r , α e s são números reais (r e s racionais), tais que $r < \alpha < s$. Suponhamos que existe um número real b , tal que $A(Q) = b < \alpha^2$. Então, existe um número real que será raiz quadrada de b (\sqrt{b}) menor que α . Dessa forma, existirá um número racional r entre \sqrt{b} e α , conforme o Lema 1.3.2, assim temos $\sqrt{b} < r < \alpha$. Podemos então afirmar que $b < r^2$ e com isso temos $b < r^2 < A(Q)$, o que vem a ser uma contradição, visto que supusemos $A(Q) = b$.

Suponhamos agora que a área $A(Q)$ do quadrado, seja igual a um número real c , tal que $\alpha^2 < c = A(Q)$. Assim, existirá a raiz quadrada de c , tal que $\alpha < \sqrt{c}$, então podemos encontrar um número racional s , entre α e \sqrt{c} , tal que $\alpha < s < \sqrt{c}$. Podemos afirmar que $s^2 < c$ e com isso $A(Q) < s^2 < c$ o que caracteriza uma contradição, pois supusemos $A(Q) = c$.

Portanto como a área do quadrado Q não pode ser menor ou maior que o número α^2 , podemos concluir

$$A(Q) = \alpha^2.$$

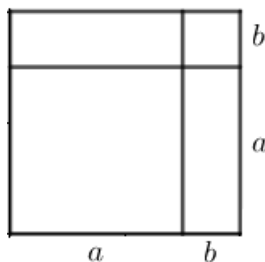
Dessa forma foram analisadas todas as possibilidades para a medida do lado de um quadrado, sendo número inteiro, racional ou irracional. Em todos os casos concluímos que a medida da área de um quadrado é numericamente igual ao quadrado da medida do lado. \square

1.3.2 A área do retângulo

Um retângulo é um quadrilátero cujos ângulos internos são todos congruentes, ou seja, possui os quatro ângulos retos e os lados opostos são paralelos e apresentam medidas iguais. Por convenção, um dos lados do retângulo chama-se base, o outro altura, uma vez que são perpendiculares.

Teorema 1.3.5. *A área de um retângulo é igual ao produto das medidas de dois dos seus lados perpendiculares.*

Prova. Para mostrar que essa relação é válida, vamos considerar um quadrado de lado $(a + b)$, conforme a figura a seguir, pois já sabemos como determinar sua área. E utilizando operações algébricas e comparações obter a fórmula da área de um retângulo.



Vimos que a área do quadrado é obtida elevando a medida do seu lado à segunda potência. Então, a área do quadrado acima, denotada por $A(Q)$, é igual a $(a + b)^2$. Com isso, conseguimos:

$$A(Q) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Nota-se claramente que a figura acima é composta por dois quadrados de lados a e b cujas áreas são, a^2 e b^2 , nessa ordem, e dois retângulos congruentes os quais terão suas áreas expressas por $A(R)$. Dessa forma, temos que a área do quadrado de lado $(a + b)$ pode ser indicada por:

$$A(Q) = a^2 + 2A(R) + b^2,$$

pois corresponde à soma das áreas dos dois quadrados com os dois retângulos mencionados. Comparando as duas sentenças que representam a área do quadrado inicial, temos:

$$a^2 + 2A(R) + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \implies A(R) = a \cdot b.$$

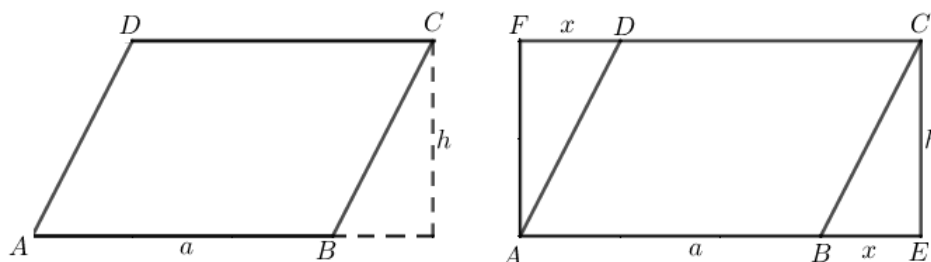
Portanto, a área do retângulo é obtida pelo produto da medida da base pela altura. □

1.3.3 A área do paralelogramo

Paralelogramo é todo quadrilátero que possui os lados opostos paralelos e congruentes, assim como os ângulos opostos também congruentes. A distância entre dois lados paralelos indica a altura do paralelogramo e um de seus lados, perpendicular à altura, será considerado base. Tanto o quadrado quanto o retângulo são casos particulares de paralelogramos, e já sabemos como determinar a área de cada uma dessas figuras. Assim, somos capazes de demonstrar que a área de um paralelogramo também é obtida mediante o produto da base pela altura.

Teorema 1.3.6. *A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de uma base pela medida da altura relativa à base indicada.*

Prova. Para tal, consideremos um paralelogramo ABCD onde $AB = a$ é uma base e h é a sua altura. Em seguida, tracemos segmentos perpendiculares às bases AB e CD, pelos pontos A e C e prolonguemos os segmentos AB e CD, de modo que intersectem os segmentos perpendiculares nos pontos E e F. Observe a figura



Note que foi obtido um retângulo AECF. Esse retângulo é composto pelo paralelogramo ABCD e por dois triângulos BEC e DFA, que são congruentes, pois são triângulos retângulos cujos lados CE e AF são congruentes, correspondentes à altura do paralelogramo, assim como os lados AD e BC, pois são lados opostos da figura inicial. Consideremos $BE = DF = x$, então, o lado AE do retângulo AECF é igual a $(a + x)$. Com isso, a área do mesmo $A(R)$ será igual a

$$A(R) = (a + x) \cdot h = a \cdot h + x \cdot h.$$

De outro modo, podemos verificar a área do mesmo retângulo como a soma das áreas do paralelogramo ABCD, denotada por $A(P)$ e dos triângulos BEC e DFA. Além disso, os dois triângulos, juntos, formam um retângulo de base x e altura h .

A área do retângulo BEDF, $A(R_1)$, constituído pelos triângulos BEC e DFA é igual a

$$A(R_1) = x \cdot h.$$



Escrevendo a área do retângulo AECF como a soma sugerida, podemos substituir a área correspondente aos dois triângulos pela área do retângulo indicado acima. De tal modo, obtemos:

$$A(R) = A(P) + A(R_1).$$

Reorganizando a equação, encontramos a área do paralelogramo como a área do retângulo AECF subtraída da área do retângulo BEDF, ou seja,

$$A(P) = A(R) - A(R_1) = a \cdot h + x \cdot h - x \cdot h = a \cdot h.$$

Portanto, a área de um paralelogramo é obtida através do produto da medida da base pela medida da altura. □

1.3.4 A área do triângulo

O triângulo é a figura geométrica limitada por três segmentos de retas concorrentes dois a dois, em três pontos distintos, vértices do triângulo, formando, obviamente, três lados e três ângulos internos cuja soma é sempre igual a 180° (π). A distância entre um de seus vértices e o lado oposto, o qual será considerado como base, é considerada altura do triângulo.

Teorema 1.3.7. *A área de um triângulo é igual à metade do produto entre a medida de uma base e a medida da altura relativa à base.*

Prova. Para determinar a área de um triângulo, vamos considerar um paralelogramo ABCD de base $AB = a$ e altura h .

Uma diagonal de um polígono é um segmento de reta que une quaisquer dois vértices não consecutivos. Assim, tracemos a diagonal AC do paralelogramo. Obtemos assim, dois triângulos congruentes ABC e CDA, ambos com bases de medida a e altura h , Figura 1.1.

Em consequência da definição, a área do paralelogramo $A(P)$ pode ser obtida adicionando as áreas dos triângulos, que são iguais, ou seja $A(ABC) = A(CDA) = A(T)$. Isto posto, temos:

$$A(P) = A(ABC) + A(CDA) = 2A(T).$$

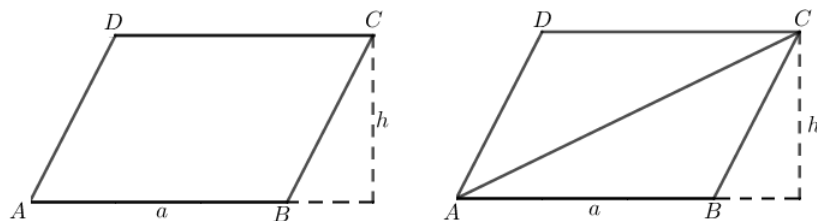


Figura 1.1:

Conhecemos a área do paralelogramo, $A(P) = a \cdot h$, assim:

$$2A(T) = a \cdot h \implies A(T) = \frac{a \cdot h}{2}.$$

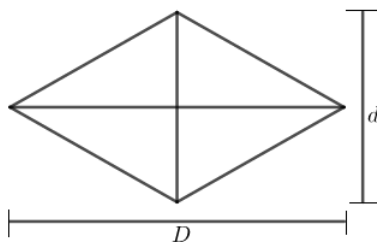
Portanto, a área do triângulo é igual ao semiproduto da medida da base pela medida da altura. \square

1.3.5 A área do losango

O losango é o quadrilátero que apresenta os quatro lados congruentes, sendo que os lados opostos são paralelos e os ângulos opostos são congruentes. Note que se um losango apresentar os quatro ângulos iguais, trata-se de um quadrado, pois os ângulos serão todos retos.

Teorema 1.3.8. *A área de um losango é igual à metade do produto das medidas das suas diagonais.*

Prova. Considerando um losango, ao traçar as duas diagonais, o mesmo fica dividido em quatro triângulos retângulos congruentes, pois as diagonais se intersectam em seus respectivos pontos médios, os segmentos gerados serão os catetos de cada triângulo e a hipotenusa dos mesmos corresponde ao lado do losango.



Sejam D e d , as duas diagonais do polígono, sabendo que se intersectam em seus respectivos pontos médios, cada um dos triângulos gerados possui os catetos medindo $\frac{D}{2}$ e $\frac{d}{2}$, um dos quais

pode ser considerado base e o outro altura do triângulo. Dessa forma podemos determinar a área de cada triângulo $A(T)$, a saber:

$$A(T) = \frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2} = \frac{D \cdot d}{8}.$$

Consequentemente encontramos a área do losango $A(L)$, a qual corresponde à soma das áreas dos quatro triângulos, ou seja,

$$A(L) = 4 \cdot A(T) = 4 \cdot \frac{D \cdot d}{8} = \frac{D \cdot d}{2}.$$

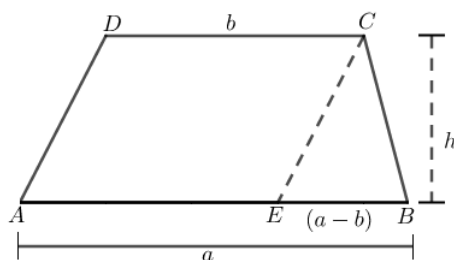
Portanto, a área de um losango é igual ao semiproduto das medidas das diagonais. □

1.3.6 A área do trapézio

Trapézio é o quadrilátero que possui apenas dois lados paralelos, chamados de bases. A altura de um trapézio corresponde à distância entre as suas bases.

Teorema 1.3.9. *A área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura.*

Prova. Vamos mostrar a relação que nos permite calcular a área de um trapézio, assim como as demais figuras, utilizando o fato de que a área é uma grandeza aditiva. Consideremos um trapézio ABCD e tracemos pelo vértice C um segmento paralelo ao lado AD encontrando a base AB no ponto E.



Note que o trapézio fica dividido em um paralelogramo de base b e um triângulo de base $(a - b)$, ambos com a mesma altura h . Pelo fato de ser uma grandeza aditiva, a área do trapézio $A(Tr)$ pode ser alcançada adicionando-se as áreas do paralelogramo $A(P)$ e do triângulo $A(T)$. Isto posto, temos:

$$A(Tr) = A(P) + A(T) = b \cdot h + \frac{(a - b) \cdot h}{2} = \frac{2bh + ah - bh}{2} = \frac{(a + b) \cdot h}{2}.$$

Portanto, a área do trapézio é o produto da base média pela medida da altura. □

Observação 1.3.10. A base média de um trapézio é um segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos. Sua medida é igual à média aritmética das medidas das duas bases.

1.4 A Área do Círculo

Nessa seção iremos, inicialmente, tratar sobre a área do círculo dentro de uma perspectiva histórica. Pretendemos expor algumas maneiras, como as civilizações antigas alcançaram os resultados que são aplicados até os dias atuais. Vamos perceber que para encontrar a regra que nos fornece a área de um círculo foi necessário observar e analisar com esmero a relação entre as medidas do comprimento e do diâmetro do mesmo, comparando com o perímetro de polígonos regulares. Esta relação aparentemente já era conhecida desde antes da era Cristã. Dando prosseguimento, a fórmula da área do círculo será demonstrada, completando a argumentação das áreas das figuras elementares.

Faremos a abertura do nosso estudo, discorrendo sobre a “*descoberta*” do intrigante número π , o qual ocorre com certa regularidade em numerosos campos da matemática e demais ciências. Para tal, façamos uso do conhecimento prévio sobre o perímetro de uma figura plana, que corresponde à soma dos comprimentos de todos os lados que formam a imagem, em se tratando de polígonos, os lados são segmentos de reta. Assim, não existe uma expressão definida para determinar perímetros de figuras planas. No caso do círculo o perímetro corresponde a sua circunferência, que é a distância percorrida em torno do mesmo, ou seja, seria o seu comprimento, caso esse fosse aberto e colocado em linha reta. Então, desde já fica estabelecido, sempre que nos referirmos à circunferência de um círculo estaremos tratando da medida de seu comprimento.

Podemos notar que a circunferência de um círculo é viria de acordo com a medida do seu raio. Assim, podemos concluir que existe uma relação entre a circunferência e o raio, conseqüentemente, entre a circunferência e o diâmetro do círculo. Pretendemos mostrar como foi comprovado que essa relação é sempre constante e, ao longo do tempo, passou a ser designada pela letra grega π .

Observação 1.4.1. O símbolo π fora usado anteriormente pelos matemáticos ingleses William Oughtred, Isaac Barrow e David Gregory para designar a circunferência de um círculo. O primeiro a usar esse símbolo para a razão entre a circunferência e o diâmetro foi o escritor inglês William Jones, numa publicação em 1706. O símbolo só encontrou aceitação geral depois que Euler o adotou em 1737.

Devido à escassez de documentos históricos, é muito difícil definir com exatidão quem identificou a relação entre o comprimento e o diâmetro de um círculo. De acordo com registros históricos,

essa relação já era conhecida desde antes da era Cristã. Os babilônios por exemplo, consideravam uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como o duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva, regras corretas para $\pi = 3$, utilizando as fórmulas atuais. Vejamos, para uma circunferência de raio r , temos:

$$C = 3 \cdot d = 3 \cdot 2r = 2 \cdot 3 \cdot r = 2\pi r, \pi = 3.$$

$$A_C = \frac{A_Q}{12} = \frac{(2 \cdot 3 \cdot r)^2}{12} = \frac{36r^2}{12} = 3 \cdot r^2 = \pi \cdot r^2, \pi = 3.$$

Em papiros egípcios foram encontrados registros onde assumiam que a área de um círculo é igual à de um quadrado cujo lado mede $\frac{8}{9}$ do diâmetro, ou seja, considerando um círculo de raio r , temos:

$$A_C = A_Q = \left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2 = \frac{64}{81} \cdot 4r^2 = \frac{256}{81} \cdot r^2 \cong 3,1604938272 \cdot r^2,$$

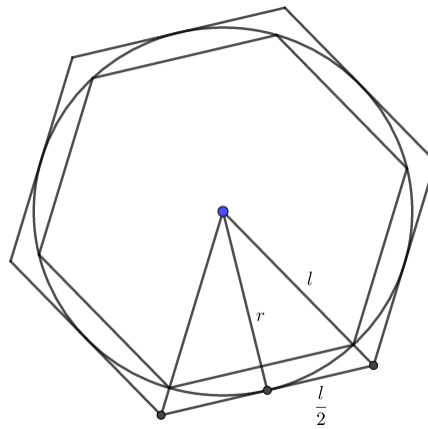
o que caracteriza uma aproximação muito significativa para o valor de π , levando em consideração a época.

Então, comparando com as fórmulas atuais, podemos perceber que tanto egípcios quanto babilônios utilizavam aproximações muito boas para o valor de π , o qual possui uma extensa e interessante história e, é bem provável que sua descoberta se deu por alguma necessidade prática, pois era o que movia a matemática das antigas civilizações, como por exemplo calcular áreas de grandes arenas, ou grandes áreas para construções, entre outras atividades.

Registros históricos que sobreviveram apontam que foram os gregos os primeiros a mostrar através de propriedades de polígonos semelhantes que a razão entre a circunferência e o diâmetro de círculos de tamanhos distintos é sempre constante. Mais precisamente, foi o matemático Arquimedes de Siracusa, cerca de 240 a.C., na antiga Grécia quem realizou a primeira tentativa científica de calcular o valor de π (cabe ressaltar que nem Arquimedes, nem qualquer outro matemático grego, utilizou as notações atuais para denotar a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo). Ao analisar a razão entre a circunferência e seu diâmetro, Arquimedes mostrou que a mesma era superior a $3\frac{10}{71}$ porém inferior a $3\frac{10}{70}$, ou seja $3,140845 < \pi < 3,142857$, resultado muito satisfatório. Para obter tal conclusão, ele aplicou o método da exaustão, calculando o perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos ao mesmo círculo e comparando as razões dos resultados obtidos com o diâmetro do círculo, iniciando o procedimento com um hexágono e sempre dobrando o número de lados do polígono, até atingir uma figura de 96 lados. Essa técnica também é conhecida como *Algoritmo de Arquimedes* ou *Método clássico para o cálculo de π* . Pretendemos agora, mostrar o início do método utilizado por Arquimedes para determinar a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo.

Para tal, consideremos um círculo de raio r . Podemos afirmar que sua circunferência está

compreendida entre o perímetro de um polígono regular inscrito e outro circunscrito ao círculo pensado. Iniciando com hexágonos, visto que é simples determinar os perímetros de hexágonos regulares na situação suposta, podemos obter, dessa forma estimativas para o valor de π . Note que o hexágono inscrito possui o lado cuja medida é igual ao raio do círculo sugerido. Para o hexágono circunscrito, podemos determinar a medida de seu lado analisando um dos triângulos equiláteros em que o hexágono é dividido. Observando a figura a seguir, perceba que a altura do triângulo indicado é igual ao raio do círculo. Em se tratando de triângulo equilátero, a altura é também mediana e bissetriz, então divide o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos os quais apresentam catetos medindo r e $\frac{l}{2}$.



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$l^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, o lado do hexágono circunscrito tem medida igual a $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$, onde r corresponde ao raio do círculo. Então, os perímetros dos hexágonos inscrito e circunscrito são, respectivamente, $6r$ e $4r\sqrt{3}$. Portanto, as razões entre perímetro e diâmetro para os hexágonos inscrito e circunscrito correspondem, na devida ordem, a:

$$\frac{6r}{2r} = 3; \quad \frac{4r\sqrt{3}}{2r} = 2\sqrt{3} \cong 3,464101.$$

Dessa forma, podemos afirmar que a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo $\left(\frac{C}{d}\right)$ está compreendida entre 3 e 3,464101.

Arquimedes, que dentre outras qualidades, era um exímio calculista, conhecia formas para determinar os perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos a círculos, a partir de dois precedentes, utilizando médias geométrica e harmônica, nessa ordem. Devido a tal conhecimento,

tendo iniciado a estratégia com o hexágono, pôde estabelecer o perímetro de polígonos regulares de 12, 24, 48 e 96 lados, investigar as razões obtidas com o diâmetro e concluir que a relação $\frac{C}{d}$ está entre $\frac{227}{71}$ e $\frac{22}{7}$, ou seja, até a segunda casa decimal, π é dado por 3, 14.

Vejamos a aproximação para o dodecágono, utilizando as fórmulas aplicadas por Arquimedes. Sejam p_n e P_n , respectivamente, os perímetros de polígonos de n lados, inscrito e circunscrito ao mesmo círculo de raio r . Então:

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}; \quad p_{2n} = (p_n \cdot P_{2n})^{\frac{1}{2}},$$

foram as regras empregadas por Arquimedes para estipular os perímetros dos polígonos regulares, sempre dobrando o número de lados, para os seguintes resultados. Vimos que para hexágonos regulares inscrito e circunscrito a um círculo de raio r , $p_6 = 6r$ e $P_6 = 4r\sqrt{3}$. Então aplicando o modelo de Arquimedes, temos:

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n} \implies P_{12} = \frac{2p_6 P_6}{p_6 + P_6} = \frac{2 \cdot 6r \cdot 4\sqrt{3}r}{6r + 4\sqrt{3}r} = \frac{24r\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = 24r(2 - \sqrt{3}).$$

$$p_{2n} = (p_n \cdot P_{2n})^{\frac{1}{2}} \implies p_{12} = (6r \cdot 24r(2 - \sqrt{3}))^{\frac{1}{2}} = 12r(2 - \sqrt{3}).$$

Podemos então concluir que as razões entre os perímetros obtidos e o diâmetro do círculo são as seguintes:

- Dodecágono inscrito:

$$\frac{12r(2 - \sqrt{3})}{2r} = 6 \cdot (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \cong 3,1058285412.$$

- Dodecágono circunscrito:

$$\frac{24r(2 - \sqrt{3})}{2r} = 12 \cdot (2 - \sqrt{3}) \cong 3,2153903092.$$

O que representa uma aproximação ainda melhor para o valor de π . Agindo dessa forma, até um polígono de 96 lados, Arquimedes alcançou o resultado ora mencionado.

Depois de Arquimedes, diversos matemáticos obtiveram aproximações para o número π , alguns utilizaram o seu método, outros, técnicas, argumentações distintas e, com a informatização, são utilizados programas, computadores para determinar π com uma infinidade de casas decimais. Faremos agora um breve levantamento sobre o progresso no desenvolvimento do valor correto do π , evidenciando alguns matemáticos que se dedicaram a tal fato.

Iniciando com Claudio Ptolomeu, 150 a.C., ele conseguiu uma estimativa notável para π em sua famosa *Syntaxis mathematica*, maior obra de astronomia da Grécia antiga, onde o valor aproximado para π é de $\frac{377}{120}$ ou 3,1416. Por volta do sec. V d.C., na China, o mecânico Tsu Ch'ung-chih apresentou $\frac{355}{113} = 3,1415929...$ como aproximação para π , a qual é correta até a sexta casa decimal. É importante acentuar que os cálculos eram manuais nos períodos indicados. O francês François Viète, em 1579, encontrou corretamente π até a nona casa decimal, utilizando o método clássico com polígonos de $6(2^{16}) = 393216$ lados. O escritor inglês William Jones, em 1706, foi o primeiro a usar o símbolo π , porém a aceitação ocorreu apenas em 1737, depois que Euler o adotou. Johann Heinrich Lambert em 1767 provou que π é irracional. William Rutherford calculou π com 208 casas decimais, das quais 152 estavam corretas, em 1841. Em 1853, novamente Rutherford determinou corretamente 400 casas decimais para π . Em 1882 Ferdinand von Lindemann, matemático alemão, provou que π é um número transcendente, isto é, não é raiz de nenhum polinômio não nulo de coeficientes racionais. Atualmente, com o auxílio de computadores é possível obter o valor de π com uma imensidade de algarismos. O maior cálculo do π registrado até hoje, foi realizado em 2013 por uma equipe da Universidade de Santa Clara (Estados Unidos), onde π foi determinado com 8 quadrilhões de dígitos.

Retomando sobre Arquimedes, sabe-se que desenvolveu trabalhos além da matemática, pois também era conceituado físico, engenheiro e inventor de numerosas obras. Suas produções em matemática alcançaram grande respeito e admiração, por apresentarem originalidade, rigor nas demonstrações, além de habilidades nos cálculos e foram escritos em linguagem clara e objetiva. Queremos destacar a produção de Arquimedes sobre a medida da área de um círculo. Esse trabalho encontra-se, assim como a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo, num tratado constituído de apenas três proposições, o qual se intitula “*A medição de um círculo*”. Obra provavelmente incompleta, na forma em que foi conhecida, na atualidade. Uma das três proposições desse tratado, é a prova, pelo método da exaustão, de que a área do círculo é igual à do triângulo retângulo cujos lados que formam o ângulo reto apresentam medidas iguais à circunferência e ao raio do círculo. Além disso, o trabalho expõe algumas aproximações racionais de raízes quadradas irracionais, resultados altamente notáveis.

Note que, considerando um círculo com as características de acordo com a proposição de *A medição de um círculo*, de Arquimedes, obtemos a relação que determina a área de um círculo, utilizando as notações atuais, vejamos

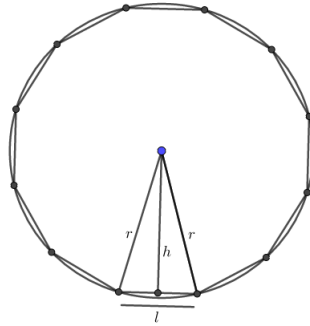
$$A_C = A_T = \frac{C \cdot r}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2,$$

onde A_C corresponde à área do círculo, A_T à área do triângulo, C à circunferência e r ao raio do círculo, consequentemente aos catetos do triângulo, conforme a proposição.

Iremos agora prosseguir com a demonstração da fórmula para a área do círculo.

Teorema 1.4.2. *A área de um círculo é igual ao produto do número π pelo quadrado da medida do seu raio.*

Prova. Dando seguimento ao processo de inscrever e circunscrever polígonos regulares ao mesmo círculo, podemos imaginar que quanto maior o número de lados dos polígonos, mais próximos eles ficarão do círculo. Assim, a área do círculo ficará muito próxima, tanto quanto for almejado, das áreas dos polígonos. Suponhamos então, um polígono de n lados (n infinitamente grande), inscrito numa circunferência de raio r . Esse polígono pode ser dividido em n triângulos isósceles, todos congruentes e com um dos vértices no centro do círculo. Sejam l medida de um dos lados e h (raio do círculo) a medida dos dois lados congruentes de cada um dos n triângulos. Como ilustração, usaremos um dodecaedro inscrito.



Para determinar a área do polígono (A_p), basta calcular a área de um dos triângulos (A_t) e multiplicar o resultado obtido por n . Assim, considerando h como a altura relativa ao lado l de um dos triângulos, temos:

$$A_p = n \cdot A_t = n \cdot \frac{l \cdot h}{2} = \frac{(n \cdot l) \cdot h}{2}.$$

Porém, $(n \cdot l)$ corresponde ao perímetro do polígono, o qual quando n aumenta indefinidamente, tende a ser igual à circunferência do círculo, ou seja, $(n \cdot l) \rightarrow C$ e, fazendo uso do mesmo fundamento, a altura tende a ser igual ao raio ($h \rightarrow r$). De modo que, conhecemos a razão $\frac{C}{d} = \pi$, assim, segue que:

$$\frac{C}{d} = \pi \implies C = d \cdot \pi \implies C = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

Dessa forma,

$$A_p = \frac{(n \cdot l) \cdot h}{2} = \frac{C \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2 = A_C.$$

Portanto, a área do círculo é obtida por meio da relação

$$A_C = \pi \cdot r^2.$$

□

De modo análogo, alcançamos a mesma conclusão quando tratamos o problema com polígonos circunscritos. □

A fórmula da área do círculo pode ser demonstrada de outras maneiras. Por exemplo, note que o método utilizado por Arquimedes para encontrar o valor de π é semelhante ao aplicado no Cálculo Diferencial Integral, o qual, é o procedimento por excelência para determinar áreas de figuras planas curvilíneas. Detendo o conhecimento de que o valor de π foi obtido por meio da razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo, também podemos demonstrar a relação que fornece a área de um círculo em função da medida de seu raio utilizando alguns conceitos Geometria e Limites.

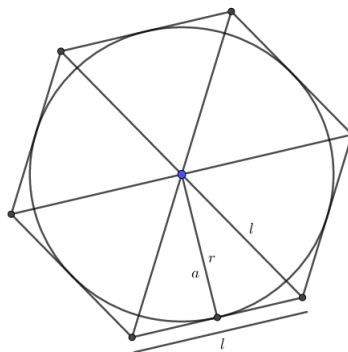
Então, consideremos um polígono regular. Sabe-se que qualquer polígono regular de n lados pode ser dividido em n triângulos congruentes. Sejam l e a , respectivamente, as medidas do lado e do apótema do polígono regular. Note que o lado e o apótema do polígono representam, nessa ordem, uma base e a altura relativa de um dos triângulos em que o polígono foi dividido. Então, a área de um polígono regular (A_P) pode ser determinada através da relação

$$A_P = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}$$

e o perímetro ($2P$) desse polígono é igual a

$$2P = n \cdot l.$$

Suponhamos um círculo de raio r , inscrito a um polígono regular de n lados (usaremos um hexágono como exemplo).



Observe que o raio do círculo coincide com o apótema do polígono. E sabemos que π é a razão entre a circunferência (C) e os eu diâmetro (d), ou seja:

$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{2r}.$$

Podemos considerar um polígono com tantos lados quanto queiramos, então, se n cresce indiscriminadamente, o polígono tende a assumir forma circular. Assim, obtemos os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = A_C \quad (1)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot l = C. \quad (2)$$

Foi visto anteriormente que $\pi = \frac{C}{2r}$, então:

$$\pi = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot l}{2r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot l}{2r}.$$

Multiplicando a expressão 1 por $\frac{r}{r}$, onde r é o raio do círculo, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{l \cdot a}{2} \cdot \frac{r}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot l \cdot a \cdot r}{2r} = A_C.$$

Porém, o apótema (a) do polígono coincide com o raio (r) do círculo, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot l \cdot r^2}{2r} = A_C,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^2 \cdot \frac{n \cdot l}{2r} = A_C,$$

mas

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot l}{2r},$$

então:

$$r^2 \cdot \pi = A_C,$$

obtendo

$$A_C = \pi \cdot r^2.$$

Portanto, a área do círculo é determinada efetuando o produto entre π e o quadrado da medida do seu raio.

Capítulo 2

Cálculo de áreas de polígonos

Esse capítulo será desenvolvido explorando algumas maneiras de calcular áreas de polígonos de modos não muito usuais na educação básica. Todavia, podem ser bastante úteis e também trabalhados com estudantes de ensino médio, uma vez que sua aplicação não necessita de conhecimentos além do nível em que o educando se encontra.

Apresentaremos o *Teorema do Cadarço* (*Shoelace Theorem*), que pode ser utilizado com alunos da terceira série do ensino médio, para calcular áreas de polígonos em geral e também o *Teorema de Pick*, que além de mostrar como determinar áreas de polígonos de um modo singular, pode ser tratado juntamente com o geoplano (ferramenta que pode auxiliar no ensino e aprendizagem da geometria plana), onde poderão ser realizadas atividades, em que os conceitos aprendidos serão visualizados no desenvolvimento e resoluções de questões envolvendo áreas de polígonos.

2.1 O cálculo de áreas de polígonos do ponto de vista da Geometria Analítica

O estabelecimento da geometria analítica foi a principal contribuição do filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650) à Matemática, por volta de 1628, através da obra *La Géométrie*, que levou a geometria analítica ao conhecimento de seus contemporâneos.

Geometria cartesiana é sinônimo de geometria analítica, mas o objetivo fundamental de Descartes era muito diferente daqueles dos textos modernos. Para Descartes, o propósito era geralmente uma construção geométrica, e não necessariamente a redução da geometria à álgebra. A obra de Descartes é frequentemente descrita como aplicação da álgebra à geometria ao passo que poderia ser bem caracterizada como sendo a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica. O uso de letras do início do alfabeto como parâmetros e das do fim como incógnitas, a adaptação da notação exponencial a estas, e o uso dos símbolos germânicos $+$ e $-$, tudo isso fez com que

a notação de Descartes se assemelhasse à nossa pois naturalmente elaboramos a nossa a partir da dele. Existe porém uma diferença importante na maneira de ver as coisas, pois ao passo que pensamos em parâmetros e incógnitas como números, Descartes pensava neles como segmentos.

Os pensamentos de Descartes estavam muito distantes de considerações práticas que hoje estão frequentemente associadas ao uso de coordenadas. Ele não estabelecia um sistema de coordenadas a fim de localizar pontos, nem pensava em coordenadas como pares de números. Dessa forma, a frase “*produto cartesiano*”, tão frequentemente utilizada hoje, é um anacronismo.

A geometria analítica caracteriza o estudo da geometria por meio de um sistema de coordenadas e dos princípios da álgebra e da análise. Estabelece uma conexão entre geometria e álgebra utilizando o raciocínio dedutivo a partir de axiomas e teoremas, obtendo conceitos e validando proposições. Todos os objetos, figuras e relações da geometria Euclidiana clássica podem ser estudados na geometria analítica por meio de métodos algébricos, o quais são utilizados para representar e resolver problemas geométricos, podendo dessa forma estabelecer uma correspondência entre equações algébricas e curvas geométricas. Assim, problemas geométricos podem ser analisados como problemas algébricos e vice-versa.

Uma das premissas da geometria analítica está em representar pontos no plano, onde cada ponto é exposto por um único par de números reais (par ordenado), os quais são as coordenadas do ponto. Toda equação envolvendo coordenadas descreve um subconjunto do plano, isto é, o conjunto solução para dada equação, ou um lugar geométrico, o qual pode ser reproduzido por meio de uma figura geométrica. Podemos então, explorar e perceber o comportamento das formas geométricas planas, utilizando expressões algébricas e a geometria analítica. Por exemplo, conseguimos determinar a área de um polígono de n lados, apresentado no plano cartesiano, a partir das coordenadas de seus vértices. Esse resultado é obtido através do *Teorema do Cadarço* (*Shoelace Theorem*), o qual será tratado, apresentando sua demonstração e algumas aplicações.

O Teorema do Cadarço é um algoritmo matemático para determinar áreas de polígonos simples, descritos num sistema de coordenadas cartesianas, por meio das coordenadas dos seus vértices. É chamado fórmula do cadarço devido à constante multiplicação cruzada entre as coordenadas que compõem os vértices do polígono. Tem aplicações em agrimensura e silvicultura, entre outras áreas. O método foi exposto por *Meister* em 1769 e por *Gauss* em 1795. Sua demonstração pode ser feita dividindo o polígono em triângulos, determinando a área de cada um dos triângulos obtidos na divisão do polígono e somando as áreas alcançadas.

Albrecht Ludwig Friedrich Meister (1724-1788) foi professor de matemática pura e aplicada em Gottingen desde de 1764, também ensinou arquitetura e arquitetura de fortaleza. Era um membro da “Sociedade de Ciências de Gottingen” e foi nomeado em 1784 como conselheiro. *Johan Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) matemático e físico alemão, com diversas contribuições significativas para a matemática e demais ciências. É considerado um dos matemáticos mais influentes

da história.

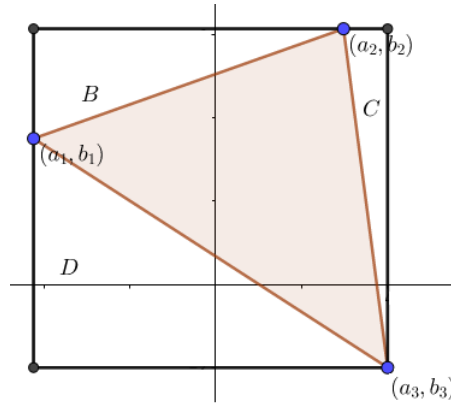
Seguimos com a demonstração do *Teorema do Cadarço*.

Teorema 2.1.1 (Shoelace Theorem). *Seja P um polígono com vértices $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ listados em sentido horário. Então a área de P é*

$$\frac{1}{2} | (a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_{n-1} b_n + a_n b_1) - (b_1 a_2 + b_2 a_3 + \dots + b_{n-1} a_n + b_n a_1) |.$$

Prova. Primeiro iremos demonstrar o resultado para o caso em que o polígono é um triângulo, pois é o primeiro caso que faz sentido o cálculo da área.

Considerando a figura abaixo. Seja S a área do triângulo cujos vértices são dados pelas coordenadas $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$. Suponhamos um retângulo de área mínima (R), circunscrito ao triângulo, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados. Pelo menos um vértice do triângulo coincidirá com um dos vértices do retângulo. Na figura, note que além do triângulo inicial, aparecem mais três triângulos.



As áreas dos três novos triângulos serão indicadas por B, C e D. Podemos então afirmar que a área do primeiro triângulo é igual à área do retângulo R, subtraída das áreas dos três triângulos B, C e D, ou seja,

$$S = R - B - C - D.$$

Analisando a figura, podemos ver, que em função das coordenadas dos vértices, as áreas são dadas por:

$$\begin{aligned} R &= (a_3 - a_1) \cdot (b_2 - b_3) = (a_1 b_3 + b_2 a_3) - (a_1 b_2 + a_3 b_3). \\ B &= \frac{1}{2} (a_2 - a_1) \cdot (b_2 - b_1) = \frac{1}{2} [(a_1 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)]. \\ C &= \frac{1}{2} (a_3 - a_2) \cdot (b_2 - b_3) = \frac{1}{2} [(a_2 b_3 + b_2 a_3) - (a_2 b_2 + a_3 b_3)]. \end{aligned}$$

Observação 2.1.2. Esse teorema é largamente utilizado no estudo da geometria analítica do Ensino Médio, para o cálculo da área de triângulos, por meio de determinantes, utilizando as coordenadas dos vértices do triângulo. A área de um triângulo qualquer de vértices $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2, b_2)$ e $A_3(a_3, b_3)$ é dada por:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} | (a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1) - (b_1 a_2 + b_2 a_3 + b_3 a_1) |.$$

Resultado que coincide com o *Teorema do Cadarço (Shoelace Theorem)*.

2.2 O Teorema de *Pick* - Um modo notável para calcular áreas de polígonos

Nessa seção iremos discorrer sobre o método que foi descoberto pelo matemático austríaco *Georg Alexander Pick* em 1899. Uma fórmula admirável, uma vez que permite determinar a área de um polígono simples, disposto em uma rede de pontos, através da contagem dos pontos sobre os lados e também no interior do polígono.

Georg Alexander Pick, nasceu em 1859, em Viena, Austria. Entrou na Universidade de Viena em 1875 e logo no ano seguinte, publicou o seu primeiro artigo matemático, com apenas 17 anos de idade. Desenvolveu um vasto trabalho no campo da matemática, publicando diversos artigos em áreas como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculo de Integrais, dentre outros. Termos como *matrizes de Pick*, *interpolação Pick-Nevanlinna*, são usados ainda nos dias atuais. Porém a sua obra mais lembrada é o *Teorema de Pick*, que apareceu em seu artigo *Geometrisches zur Zahlenlehre*, publicado em 1899, o qual na época, não recebeu muita atenção. Contudo, em 1969, o *Teorema de Pick* foi publicado novamente, pelo matemático Hugo Steinhaus e, a partir de então, passou a receber a merecida atenção e apreciação, devido entre outros aspectos a sua compreensibilidade e requinte.

Outro fato interessante da vida de Pick, em 1910, ele participou de uma comissão criada pela Universidade de Praga, que nomeou Albert Einstein para a cadeira de Física, a qual ocupou até 1913, Pick foi o principal motivador por trás da nomeação. Aposentou-se das atividades acadêmicas em 1927 e foi nomeado professor emérito da Universidade de Praga.

Pick foi eleito membro da Academia das Ciências e das Artes da República Tcheca, porém, foi excluído, depois que os nazistas lá instalaram o seu gabinete de guerra. Foi criado um campo

de concentração de Theresienstadt, em 1942, para abrigar idosos, privilegiados e famosos judeus. Pick foi enviado para esse campo, morrendo duas semanas depois.

Estudaremos agora um interessante método para determinar áreas de polígonos, por meio da contagem dos pontos que pertencem à figura, situada em uma rede de pontos no plano.

Teorema 1. *A área (A) de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma rede no plano, é dada pela expressão*

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

onde B é o número de pontos da rede situados sobre o contorno (lados) do polígono e I é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.

Para demonstrar esse teorema, é necessário conhecer com precisão as definições a seguir.

Definição 2.2.1. *Uma rede de pontos no plano é um conjunto de pontos dispostos regularmente ao longo de retas verticais e horizontais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na vertical ou na horizontal é igual a 1.*

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas, com origem num ponto da rede, um eixo na direção vertical e outro na horizontal, a rede pode ser descrita como o conjunto de todos os pontos (m, n) , num sistema de coordenadas cartesianas, se um ponto da rede for considerado como a origem, onde as coordenadas são números inteiros. Note que não trabalharemos com um sistema de coordenadas fixo. A origem do sistema será o ponto da rede que for mais conveniente.

Definição 2.2.2. *Um polígono simples é aquele cujo contorno é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo mesmo vértice.*

Definição 2.2.3. *Um triângulo chama-se fundamental quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto (do contorno ou do interior) sobre a rede.*

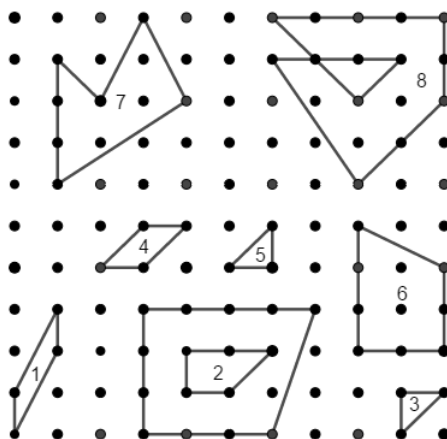
Definição 2.2.4. *Um paralelogramo diz-se fundamental quando os quatro vértices são os únicos de seus pontos que pertencem à rede*

Como consequência das definições acima, qualquer uma das duas diagonais de um paralelogramo fundamental o decompõe em dois triângulos fundamentais com uma base comum.

A seguir, um exemplo de uma rede com alguns polígonos, onde os triângulos 3 e 5 são fundamentais, assim como os paralelogramos 1 e 4. Podemos determinar as áreas das figuras 6 e 7, utilizando a fórmula de *Pick*, por se tratarem de polígonos simples. O mesmo não pode ser feito

com as figuras 2 e 8, pois não são polígonos simples. Assim, considerando a rede a seguir, de acordo com a fórmula de *Pick*, temos que a área da figura 7 é igual a

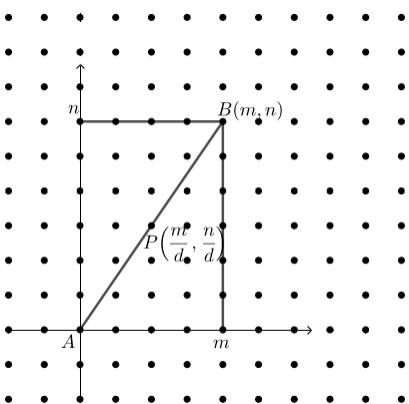
$$A = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{7}{2} + 3 - 1 = 5,5$$



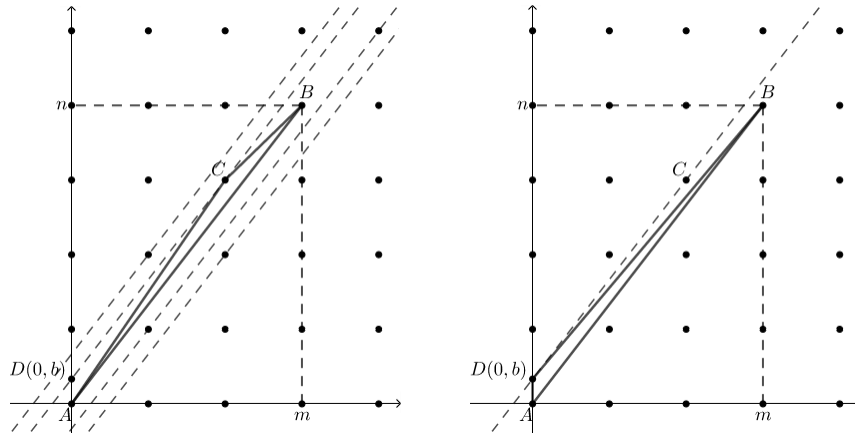
Vamos também enunciar alguns teoremas, seguidos das respectivas demonstrações, que serão imprescindíveis para a comprovação da fórmula de *Pick*.

Teorema 2.2.5. *A área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$.*

Prova. Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas numa rede de pontos. Sejam $A(0, 0)$ e $B(m, n)$ as coordenadas (inteiras) dos dois primeiros vértices de um triângulo fundamental ABC . Note que m e n são primos entre si, uma vez que se um inteiro $d > 1$ for um divisor comum de m e n , haveria na rede, um ponto P de coordenadas $\frac{m}{d}$ e $\frac{n}{d}$, tal que $P(\frac{m}{d}, \frac{n}{d})$ estaria sobre o segmento AB , logo o triângulo ABC não seria fundamental.



Agora, suponhamos $m \neq 0$. A reta que passa pelo vértice C do triângulo ABC e é paralela ao lado AB, tem coeficiente angular $\frac{n}{m}$, logo possui equação $y = \left(\frac{n}{m}\right)x + b$, onde b é a ordenada do ponto D(0, b) de interseção com o eixo vertical. Assim, qualquer triângulo que tenha AB como base e cujo terceiro vértice pertence a essa reta, tem a mesma área que ABC. Podemos então afirmar que área ABC = área ABD = $\frac{|bm|}{2}$, pois |b| é a medida da base e |m| é a medida da altura do triângulo ABD.



Provaremos que $|b| = \frac{1}{|m|}$, assim poderemos concluir que área ABC = $\frac{1}{2}$.

Para isso, consideremos de um modo mais geral, a equação $y = \left(\frac{n}{m}\right)x + \beta$, de qualquer reta paralela a AB. β é a ordenada do ponto de interseção com o eixo vertical. Dessa forma, se houver algum ponto da rede com coordenadas (s, t) que pertença a essa reta, devemos ter $t = \left(\frac{n}{m}\right)s + \beta$. Assim:

$$\beta = t - \frac{ns}{m} = \frac{mt - ns}{m}.$$

Como m e n são primos entre si, sabemos que existem inteiros t e s, tais que $mt - ns = 1$, desse modo, substituindo esse resultado na equação acima, obtemos $\beta = \frac{1}{m}$. E dentre as retas consideradas, a mais próxima da base AB é a que passa pelo vértice C, para a qual temos $\beta = b$. Logo, |b| é o menor valor positivo que | β | pode assumir, portanto $|b| = \frac{1}{|m|}$.

Falta mostrar o caso em que $m = 0$, para que a demonstração fique completa. Porém, se $m = 0$, devemos ter $n = \pm 1$, para que o triângulo seja fundamental. Nesse caso, ABC é um triângulo retângulo, metade de um dos quadrados da rede, portanto sua área é igual $\frac{1}{2}$. \square

Corolário 2.2.6. A área de um paralelogramo fundamental é igual a 1.

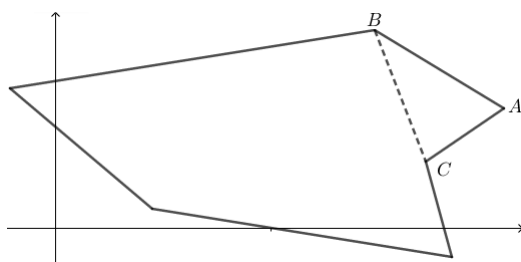
Teorema 2.2.7. Todo polígono de n lados pode ser decomposto como uma reunião de $(n - 2)$ triângulos justapostos cujos vértices são vértices do polígono dado.

Prova. Suponhamos que o teorema não seja verdadeiro, então, existe pelo menos um polígono P

com n lados que não pode ser decomposto em $(n - 2)$ triângulos. Vamos assumir que n é o menor número natural, tal que o polígono P não pode ser decomposto conforme o enunciado.

Então, consideremos no plano, um sistema de coordenadas cartesianas e um polígono P , tal que nenhum de seus lados seja paralelo ao eixo das ordenadas. Supondo A o ponto no contorno de P com maior abscissa, esse será um vértice, pois o polígono não apresenta nenhum lado vertical e sejam B e C , os vértices adjacentes a A . Teremos dois casos possíveis.

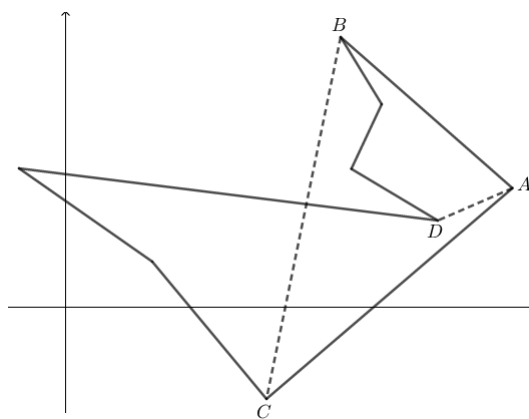
- Caso 1: A , B e C são os únicos vértices de P que estão contidos no triângulo ABC .



Considerando o segmento BC , obtemos um novo polígono, P' , com $(n - 1)$ lados, pois substituímos os lados AB e AC por BC . Dessa forma, o polígono P' pode ser decomposto de acordo com o teorema acima, uma vez que admitimos n como o menor número de lados que não satisfaz o teorema, ou seja, P' pode ser decomposto em $(n - 3)$ triângulos. Juntando a decomposição de P' ao triângulo ABC , podemos afirmar que o teorema também é válido para P , o que é uma contradição.

- Caso 2: O triângulo ABC contém outros vértices de P , além de A , B , e C .

Dessa forma, considerando os pontos pertencentes ao triângulo ABC escolhemos o mais distante do segmento BC , para que traçando a diagonal AD , esta não intersecte nenhum dos lados de P .



Ao traçar o segmento AD, o polígono P fica dividido em dois polígonos, P' e P'' , ambos com o número de lados menor que n . Assim, podemos afirmar que os dois polígonos gerados podem ser decompostos conforme o teorema, já que supusemos n como o menor número de lados para não ocorrer a decomposição.

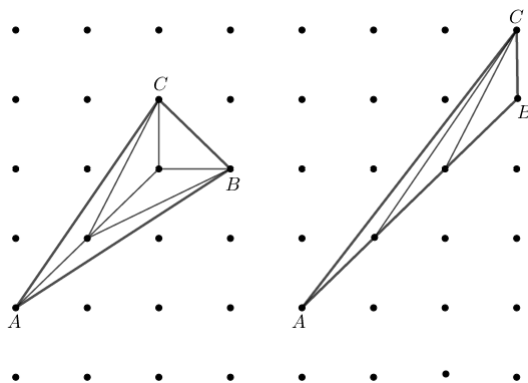
Juntando as decomposições de P' e P'' , encontramos uma decomposição para P, o que é uma contradição. Portanto, concluímos a demonstração desse Teorema. \square

Observação 2.2.8. O Teorema 2.2.7 é válido para polígonos convexos e não convexos.

Corolário 2.2.9. A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados, é igual a $(n - 2) \cdot \pi$.

Teorema 2.2.10. Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.

Prova. Vimos no Teorema 2.2.7, que todo polígono pode ser decomposto em $(n - 2)$ triângulos. Assim, vamos considerar um triângulo ABC com m pontos na rede (no interior ou no contorno). Se existir algum ponto da rede no interior do triângulo, podemos ligar esse ponto a cada vértice do triângulo ABC, dividindo-o em três triângulos. Havendo ainda pontos da rede no interior de algum dos triângulos obtidos, podemos repetir o procedimento até não mais existirem pontos interiores a triângulos. Se houver pontos da rede sobre algum lado do triângulo ABC, escolhemos esses pontos e ligamos ao vértice oposto ao lado considerado.



Prosseguindo desta maneira, com um número finito de etapas, chegaremos a uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais. Esse procedimento pode ser efetuado em cada um dos $(n - 2)$ triângulos em que um polígono de n lados pode ser decomposto. \square

Seguiremos agora, que possuímos uma expressiva fundamentação, com a demonstração do *Teorema de Pick*

Teorema 2.2.11. *A área (A) de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma rede no plano, é dada pela expressão*

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

onde B é o número de pontos da rede situados sobre o contorno (lados) do polígono e I é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.

Prova. Consideremos um polígono P cujos vértices pertencem a uma rede. Vamos indicar por B e I, respectivamente, o número de pontos da rede, situados sobre o contorno e no interior de P.

Queremos mostrar que a área do polígono P é igual a $\frac{B}{2} + I - 1$. Para tal, sabemos que todo polígono pode ser decomposto em T triângulos fundamentais (Teorema 2.2.10) e cada um dos triângulos fundamentais possui área igual a $\frac{1}{2}$ (Teorema 2.2.5). Então, para provar o teorema acima, vamos investigar os triângulos fundamentais e as relações que podem ser obtidas com a soma de seus ângulos internos e os pontos da rede pertencentes ao polígono P.

Podemos calcular a soma dos ângulos internos dos T triângulos fundamentais da decomposição de P de dois modos distintos.

No primeiro, basta efetuar o produto $T \cdot \pi$, uma vez que temos T triângulos e, em todo triângulo, a soma dos ângulos internos vale π .

Já no segundo modo, vamos determinar a soma S_b dos ângulos que têm vértice no contorno e a soma S_i dos ângulos cujos vértices estão no interior de P. Indicaremos os vértices de P por B' e os pontos sobre o contorno que não são vértices por B'' , assim, $B = B' + B''$. Temos que a soma dos ângulos que estão nos vértices de P é igual a $(B' - 2) \cdot \pi$, pois trata-se da soma dos ângulos internos de um polígono. Em cada ponto do contorno do polígono que não são vértices do mesmo, podemos computar um ângulo raso, pois estão sobre um segmento de reta. Dessa forma a soma dos ângulos nesses pontos é igual a $B'' \cdot \pi$. Então:

$$S_b = (B' - 2) \cdot \pi + B'' \cdot \pi = (B' + B'' - 2) \cdot \pi = (B - 2) \cdot \pi.$$

Analisando os pontos interiores a P, note que cada um dos pontos será um vértice de vários triângulos fundamentais e, considerando todos os ângulos que tem cada ponto como vértice, teremos o equivalente a 360° , ou seja, 2π , assim,

$$S_i = I \cdot 2\pi,$$

então a soma dos ângulos internos de todos os triângulos fundamentais que integram P, também pode ser expressa por

$$S_b + S_i = (B - 2) \cdot \pi + 2I \cdot \pi = (B + 2I - 2) \cdot \pi.$$

Equiparando as duas expressões obtidas para apontar a soma dos ângulos internos dos triângulos fundamentais da constituição de P , temos:

$$T \cdot \pi = (B + 2I - 2) \cdot \pi,$$

assim:

$$T = B + 2I - 2,$$

ou seja, o número de triângulos fundamentais em que P pode ser dividido é igual a $B + 2I - 2$. A área (A) de um polígono pode ser determinada calculando $T \cdot \frac{1}{2}$, uma vez que a área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$, portanto

$$A = (B + 2I - 2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{B}{2} + I - 1,$$

como queríamos demonstrar.

□

Capítulo 3

Áreas após o surgimento do Cálculo

O presente capítulo irá abordar sobre o cálculo de áreas de regiões delimitadas por curvas. Assim, trataremos, inicialmente, sobre a área de uma região curvilínea como uma soma infinita de áreas de figuras que aproximam-se de retângulos, seguindo com a definição e cálculo de integrais definidas e uma de suas aplicações que é a determinação de áreas entre curvas.

3.1 Área de regiões curvilíneas

Buscamos realizar um levantamento sobre como determinar áreas de polígonos e, em particular, do círculo, única curva estudada, até o momento, não foi sugerido nenhum questionamento sobre áreas de figuras curvilíneas, em geral. Assim, esse capítulo será destinado a tratar a respeito desse tema.

Para tentar resolver o problema da área, primeiro devemos saber qual o significado da palavra área, o que como já foi visto, é de certa forma simples para regiões com lados retos, como triângulos, quadriláteros e polígonos em geral. Como já tratado anteriormente, para um retângulo a área é definida como o produto da medida do comprimento pela medida da largura. A área de um triângulo é obtida através do semiproduto da sua base pela altura. Para um polígono de n lados, podemos obter sua área dividindo-o em triângulos e adicionando as áreas dos mesmos.

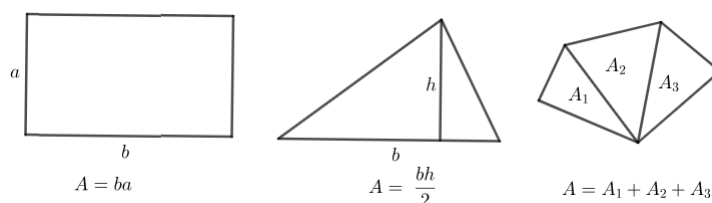


Figura 3.1:

Para uma região com lados curvos, encontrar sua área não é tão óbvio, pois não podemos dividir essa região em figuras, as quais sabemos como determinar sua área. Possuímos uma noção intuitiva de qual é a área de uma região, porém, precisamos determinar de forma precisa essa ideia e chegar a uma definição exata de área. Devemos resolver o problema de como encontrar a área de uma região S que está sob a curva $y = f(x)$, de a até b , admitindo que f seja uma função contínua, limitada pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, conforme a Figura 3.2.

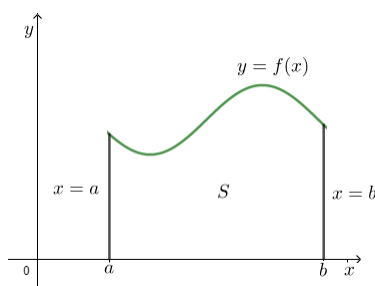


Figura 3.2:

Para determinar a área, primeiramente devemos aproximar a região S utilizando retângulos e depois tomamos os limites das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos. Como exemplo, vamos estimar a área sobre a parábola $y = x^2$ de 0 até 1. (Figura 3.3)

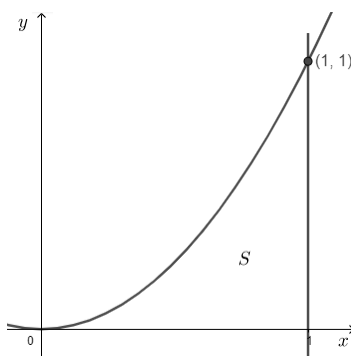


Figura 3.3:

Note que a área de S deve estar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1. Porém, podemos encontrar uma aproximação melhor para S . Suponhamos que S

seja dividida em quatro faixas S_1, S_2, S_3 e S_4 , traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4}$, conforme a Figura 3.4.

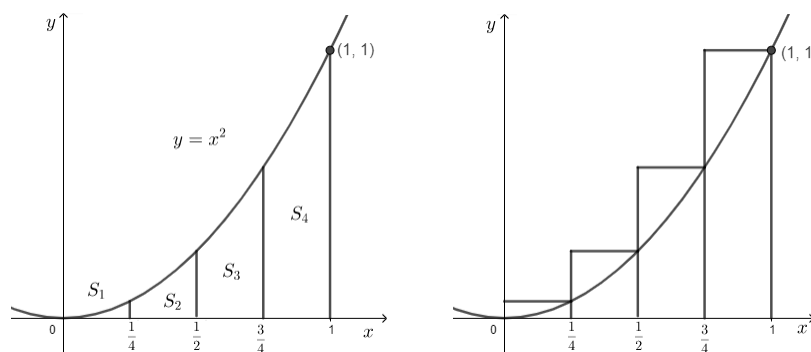


Figura 3.4:

Podemos aproximar a área de cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa, ou seja, as alturas são os valores da função $f(x) = x^2$. Assim, cada um dos retângulos terá sua base medindo $\frac{1}{4}$ e alturas iguais a $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ e 1^2 . Dessa forma, considerando R_4 como a soma das áreas desses retângulos aproximantes, obteremos:

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0,46875.$$

Então, comparando as figuras acima, podemos afirmar que a área de S é menor que a área de R_4 , logo

$$S < 0,46875.$$

Em vez de usar os retângulos da Figura 3.4, poderíamos usar os retângulos menores, cujas alturas estão nas extremidades esquerdas de cada faixa, para observar uma aproximação da área de S . (Figura 3.5)

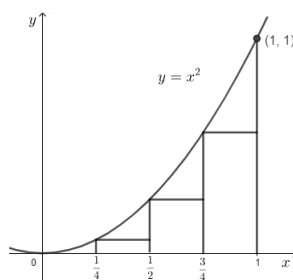


Figura 3.5:

Considerando L_4 como a soma das áreas desses retângulos aproximantes, temos:

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0,21875.$$

Podemos notar que a área de S é maior que a área de L_4 , então temos estimativas inferior e superior para a área de S , ou seja,

$$0,21875 < S < 0,46875.$$

Esse processo pode ser repetido aumentando o número de faixas. (Figura 3.6)

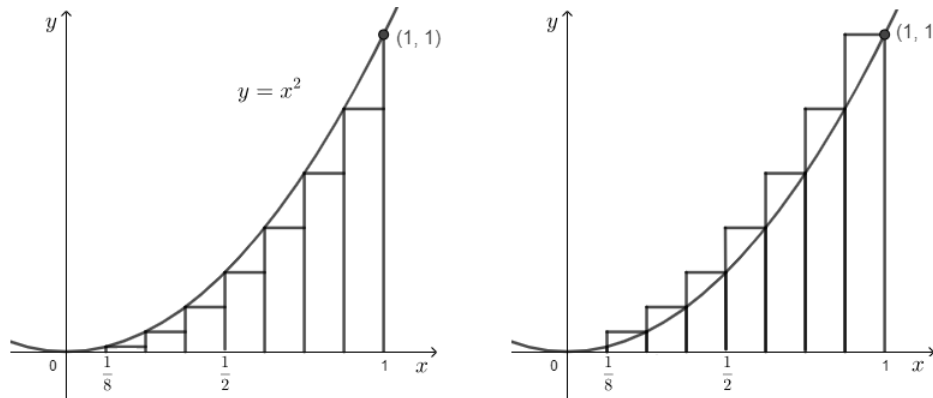


Figura 3.6:

Dividindo a região S em oito faixas, ou seja, aproximando a área de S por oito retângulos e calculando a soma das áreas dos retângulos menores (L_8) e a soma das áreas dos retângulos maiores (R_8), obtemos estimativas inferior e superior melhores para a área de S :

$$0,2734375 < S < 0,3984375.$$

Podemos, assim estimar que a área de S está compreendida entre 0,2734375 e 0,3984375.

Se aumentarmos o número de faixas, podemos obter melhores estimativas para a área procurada. A tabela abaixo, apresenta resultados obtidos através de cálculos similares, realizados com programas apropriados, usando n retângulos cujas alturas são encontradas com extremidades esquerdas (L_n) ou com as extremidades direitas (R_n). Considerando 1000 faixas, obtemos uma desigualdade bem estreita, onde a área de S está entre 0,3328335 e 0,3338335. Determinando a média aritmética desses números, obtemos $S = 0,3333335$, o que é uma boa estimativa para a área desejada.

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

Analisando a tabela, parece que a área de S aproxima-se de $\frac{1}{3}$, a medida que aumentamos n . Vamos mostrar que isso é verdade, ou seja, mostrar que a soma das áreas dos retângulos aproximantes, tanto superiores quanto inferiores, tendem a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{3}.$$

Tomando L_n , a soma das áreas dos retângulos aproximantes inferiores, temos que cada retângulo tem uma largura $\frac{1}{n}$ e as alturas são os valores da função $f(x) = x^2$ nos pontos $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$, isto é, as alturas são $0^2, \left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{3}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$. Dessa forma

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{n} \cdot 0^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 - 2n + 1). \end{aligned}$$

A soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos é dada por

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

O que pode ser mostrado por indução.

Então, substituindo essa sentença na expressão para L_n , obtemos

$$L_n = \frac{1}{n^3} \cdot \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2n + 1 \right] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}.$$

Assim, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{n} \right) - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

De forma análoga, pode ser mostrado que a soma das áreas dos retângulos aproximantes superiores tendem a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}.$$

Então, a medida que aumentamos n , tanto L_n como R_n tornam-se aproximações cada vez melhores da área de S . Portanto, definimos a área de S como o limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes, isto é,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}.$$

A ideia aplicada no exemplo anterior pode ser utilizada em regiões mais gerais, como por exemplo na Figura 3.2.

Dessa forma, considerando a curva a seguir, para determinar a área S , delimitada pela mesma e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, iniciaremos dividindo S em n faixas, $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ de igual largura, como na Figura 3.7.

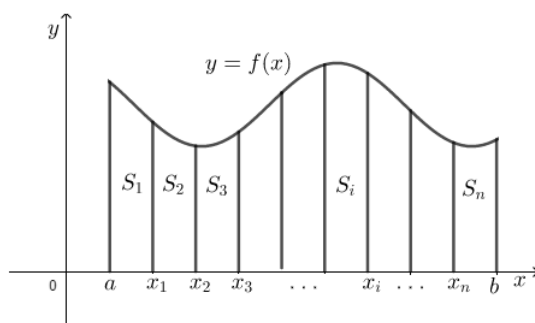


Figura 3.7:

A largura do intervalo $[a, b]$ é $b - a$; assim a largura de cada uma das n faixas é

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Essas faixas dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. As extremidades direitas dos subintervalos são

$$x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, x_3 = a + 3\Delta x, \dots$$

Vamos aproximar a i -ésima faixa de S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, que é o valor de f na extremidade direita, conforme Figura 3.8. Então, a área do i -ésimo retângulo é $f(x_i)\Delta x$. O que consideramos intuitivamente como a área de S é aproximado pela soma das áreas desses retângulos, que é

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x.$$

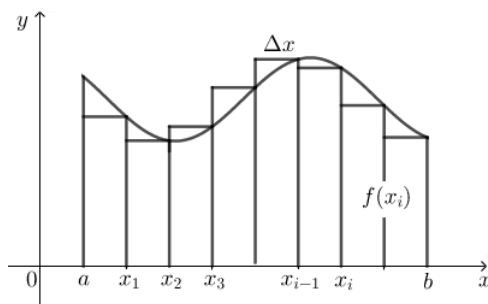


Figura 3.8:

Note que essa aproximação pode tornar-se cada vez melhor, à medida que aumentamos o número de faixas, isto é, quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, vamos definir a área da região S da seguinte forma.

Definição 3.1.1. A área da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x].$$

O limite acima sempre existe, uma vez que estamos supondo que f seja contínua. De modo semelhante, obteremos o mesmo valor para a área de S , se usarmos as extremidades esquerdas dos subintervalos. Assim

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x].$$

Podemos, em vez de usar extremidades esquerdas ou direitas, admitir a altura do i -ésimo retângulo como o valor de f , em *qualquer número* x_i^* no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Os números $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ são chamados de pontos amostrais. Logo, uma expressão mais geral para

a área de S é

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x].$$

Utilizando a notação de somatório, teremos

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x.$$

A soma $\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$ que decorre da definição acima é chamada *soma de Riemann*, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866).

3.2 A Integral Definida

Vimos anteriormente que um limite da forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x],$$

aparece quando calculamos uma área. Na verdade, esse mesmo tipo de limite ocorre em uma grande variedade de situações, como por exemplo para determinar o comprimento de curvas, volumes de sólidos, centros de massa, como também em outras quantidades. Portanto, esse tipo de limite recebe um nome e notação especiais.

Definição 3.2.1. Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ as extremidades desses subintervalos, escolhemos os pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a *integral definida de f de a a b* é

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x,$$

desde que esse limite exista. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Observação 3.2.2. Todos os teoremas desse capítulo podem ser verificados no livro *Cálculo volume 1*, James Stewart.

Teorema 3.2.3. Se f for contínua em $[a, b]$, ou tiver apenas um número finito de descontinuidades de saltos, então f é integrável em $[a, b]$; ou seja, a integral definida $\int_a^b f(x) dx$ existe.

Teorema 3.2.4. Se f for integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x,$$

em que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i\Delta x$

Exemplo 3.2.5. Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x) dx$.

Solução

Com n subintervalos, temos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}.$$

Assim, $x_0 = 0, x_1 = 3/n, x_2 = 6/n, x_3 = 9/n$ e, em geral, $x_i = 3i/n$. Dessa forma:

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x^3 - 6x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{3i}{n}\right) \frac{3}{n}. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6 \left(\frac{3i}{n}\right) \right]. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i \right]. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^n i \right]. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{81}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{54}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right\}. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{81}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - 27 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]. \\ &= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6,75. \end{aligned}$$

Note que essa integral não pode ser interpretada como uma área, visto que a função assume valores positivos e negativos. Porém, ela pode ser interpretada como a diferença de áreas $A_1 - A_2$, conforme a Figura 3.9.

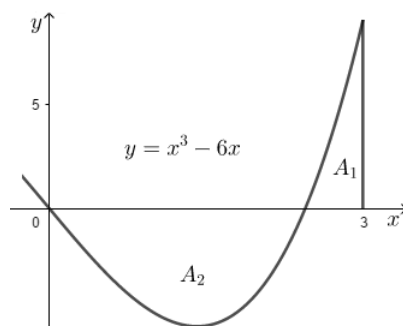


Figura 3.9:

Na próxima seção, veremos o método mais simples para o cálculo da integral do exemplo anterior, consequentemente, também para o cálculo da área delimitada pela curva.

Agora iremos enunciar o *Teorema Fundamental do Cálculo*, o qual recebe um nome apropriado, pois estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral, pois derivação e integração são processos inversos. O Teorema Fundamental do Cálculo dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral. Foram Newton e Leibniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas.

Teorema 3.2.6. *O Teorema Fundamental do Cálculo*

Suponha que f seja contínua em $[a, b]$.

1 Se $g(x) = \int_a^x f(t) dt$, então $g'(x) = f(x)$

2 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, quando F for qualquer primitiva de f , isto é, $F' = f$.

Exemplo 3.2.7. Calcule a integral $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x) dx$.

Solução:

$$\int_{-1}^2 (x^3 - 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 \right]_{-1}^2 = \left(\frac{16}{4} - 4 \right) - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{3}{4}.$$

3.3 Aplicações de integração

3.3.1 Áreas entre curvas

Foi visto que podemos determinar áreas sob gráficos de funções. Procuraremos agora, perceber como utilizar integrais para calcular áreas de regiões entre gráficos de duas funções.

Considere uma região S entre duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre as retas $x = a$ e $x = b$, em que f e g são funções contínuas e $f(x) \geq g(x)$, para todo x em $[a, b]$. Observe a figura a seguir.

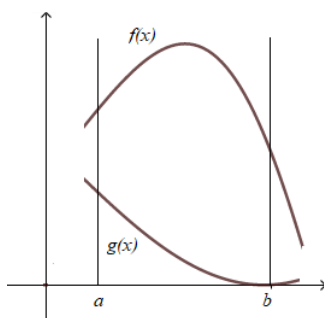


Figura 3.10:

Definição 3.3.1. A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$ é

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Observe que, no caso especial onde $g(x) = 0$, S é a região sob o gráfico de f e, a nossa definição geral, se reduz à definição anterior.

Exemplo 3.3.2. Encontre a área da região entre as parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

Solução

Primeiro vamos determinar os pontos de intersecção entre as curvas. Para isso, consideremos:

$$x^2 = 2x - x^2 \implies 2x^2 - 2x = 0 \implies x = 0; x = 1$$

Então, $(0, 0)$ e $(1, 1)$ são os pontos de intersecção entre as curvas. Observando a figura a seguir, podemos notar que as fronteiras superior e inferior da região correspondem, respectivamente às parábolas $y = 2x - x^2$ e x^2 .

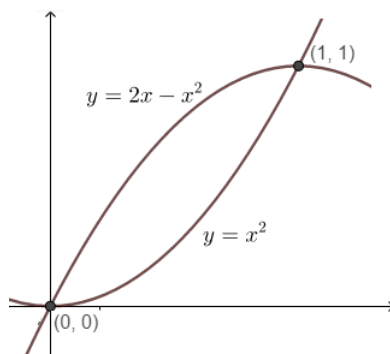


Figura 3.11:

Assim, temos que a área procurada pode ser determinada por meio da integral abaixo.

$$\int_0^1 (2x - x^2) - x^2 dx = \int_0^1 2x - x^2 dx - \int_0^1 x^2 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Podemos também, encontrar regiões delimitadas pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geq g(x)$ para alguns valores de x , mas $g(x) \geq f(x)$ para outros valores de x . Nesse caso, dividimos a região inicial S , em várias regiões S_1, S_2, \dots com áreas A_1, A_2, \dots , conforme a figura abaixo.

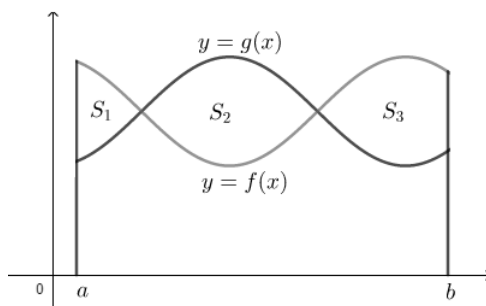


Figura 3.12:

Então, definimos a área da região S , como a soma das áreas das regiões menores S_1, S_2, \dots , ou seja, $A = A_1 + A_2 + \dots$. Como

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x), & \text{quando } f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x), & \text{quando } g(x) \geq f(x) \end{cases}$$

Temos que a área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre $x = a$ e $x = b$ é

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Quando usamos a integral acima, ainda devemos dividi-la em integrais correspondentes a A_1, A_2, \dots

Exemplo 3.3.3. Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

Solução

Os pontos de intersecção ocorrem quando $\sin x = \cos x$, ou seja, quando $x = \frac{\pi}{4}$ (pois $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$). Observe a figura.

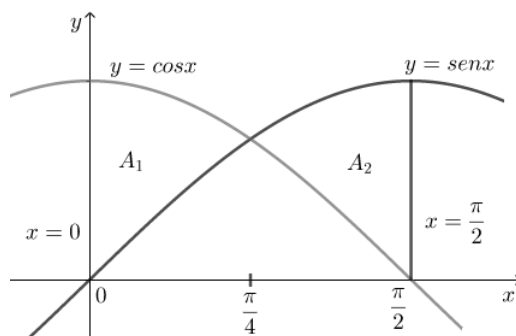


Figura 3.13:

Da figura podemos notar que $\cos x \geq \sin x$ quando $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ e $\sin x \geq \cos x$ quando $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Portanto, a área procurada pode ser determinada por meio da integral a seguir.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx. \\ &= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}. \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 \right) + \left(0 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \\ &= 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

Capítulo 4

O Teorema de Bolyai-Gerwien

O desenvolvimento desse capítulo está relacionado a equivalência entre áreas de figuras planas, mais especificamente entre polígonos. Não discorreremos sobre áreas de figuras curvilíneas, uma vez que sabemos que o Cálculo Diferencial Integral é o método por excelência para tratar desse tipo de problema, conforme vimos no capítulo anterior.

Durante a evolução desse estudo, pôde ser notado que quando necessário, podemos dividir um polígono em figuras mais simples e determinar a área da figura inicial através do somatório das áreas dos polígonos obtidos na decomposição realizada. Pretendemos mostrar que é sempre possível transformar um polígono qualquer em um quadrado de mesma área, através da decomposição da figura e rearranjo das partes recortadas (devemos entender por rearranjo, movimentos rígidos de rotação ou translação, sem deformar as partes que compõem o polígono). Dessa forma, poderemos comparar a área de toda figura plana, com a de um quadrado e assim auferir um valor para a mesma.

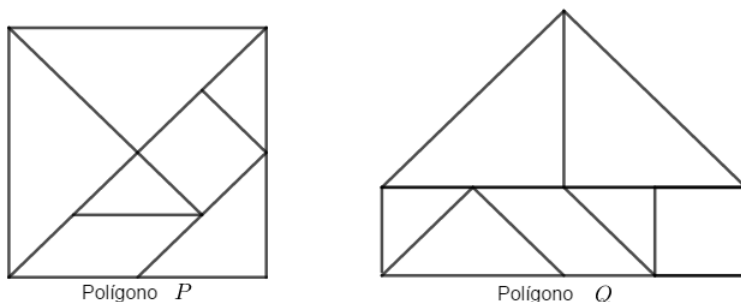
Estudaremos a definição de equidecomponibilidade, a qual devemos entender os conceitos, seu significado, para que a partir desses e outros conhecimentos, possamos demonstrar o *Teorema de Bolyai-Gerwien*, completando dessa forma nosso objetivo.

4.1 Equidecomponibilidade

Trabalharemos com conceitos que devem ser aplicados a polígonos, com a finalidade de comparar áreas e determinar medidas possivelmente desconhecidas. No Capítulo 1, Seção 1.3, foi abordada a definição de área de um polígono como um número real positivo, uma grandeza aditiva e para um quadrado de lado 1, sua área é igual a 1 unidade de área. Além disso, vamos agregar a essa definição, o conceito de invariância da grandeza área, ou seja, se P_1 é um polígono e outro polígono P_2 é obtido a partir de P_1 , por meio de movimentos rígidos, então a área de P_1 é igual a área de P_2 .

Desse modo, considerando a aditividade da área e o fato de que um polígono P pode ser decomposto em n polígonos (P_1, \dots, P_n) disjuntos e justapostos, podemos afirmar que $P = P_1 + \dots + P_n$. Assim, temos a definição que segue.

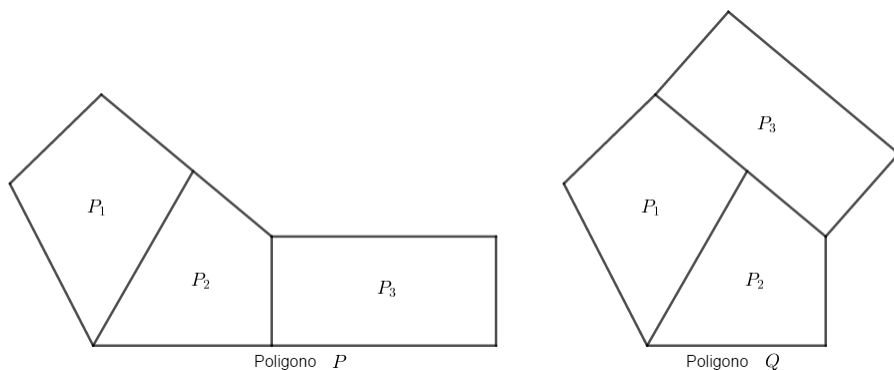
Definição 4.1.1. *Dois polígonos P e Q são equidecomponíveis se é possível decompor uma das figuras em um número finito de partes e por meio de um rearranjo das mesmas, compor a outra figura. Escrevemos $P \sim Q$.*



O polígono Q foi obtido a partir do quadrado P , que foi decomposto em sete peças, mediante um rearranjo das mesmas.

As figuras acima são exemplos obtidos a partir do tangram, um quebra cabeça geométrico chinês. Jogo praticado nos ensinos fundamental e médio com uma significativa frequência, e dentre outras aplicações, pode também ser utilizado para orientações iniciais sobre equidecomponibilidade, para os estudantes desse nível da educação.

De outro modo, podemos "desmontar" o polígono P em polígonos P_1, \dots, P_n e, a partir desses, montar o polígono Q . É importante ressaltar, que deve ser um número finito de peças, isto é, o procedimento é finito. O polígono P pode ser observado como uma adição dos polígonos P_1, \dots, P_n , ou seja, $P = P_1 + \dots + P_n$ e Q pode ser construído a partir de P_1, \dots, P_n . Como exemplo, podemos observar as figuras a seguir.



Note que o polígono Q foi obtido a partir do polígono P , através de uma rotação do polígono P_3 , que constitui as duas figuras.

Podemos verificar que equidecomponibilidade é uma relação de equivalência. Vejamos.

- 1 Reflexividade: Um polígono P é equidecomponível com ele mesmo, $P \sim P$.
- 2 Simetria: Dados dois polígonos P e Q , se P é equidecomponível com Q então Q é equidecomponível com P , ou seja, $P \sim Q \implies Q \sim P$.
- 3 Transitividade: Se um polígono P for equidecomponível com um polígono Q e Q for equidecomponível com o polígono R , então os polígonos P e R são equidecomponíveis, ou seja, $P \sim Q$ e $Q \sim R$, então $P \sim R$.

Estamos tratando de figuras onde uma é obtida segundo uma decomposição da outra, então é natural pensarmos sobre uma equivalência entre as áreas das figuras relacionadas, e de fato essa equidade acontece, o que pode ser mostrado por meio da proposição seguinte.

Proposição 4.1.2. *Se duas figuras são equidecomponíveis, então elas possuem a mesma área.*

Prova. Sejam P e Q duas figuras equidecomponíveis, ou seja, se P for fragmentado em polígonos P_1, \dots, P_n , podemos reordenar esses polígonos e obter Q , então $P = P_1 + \dots + P_n = Q$.

Sejam $A(P)$, $A(Q)$ e $A(P_1), \dots, A(P_n)$ as respectivas áreas de P , Q e P_1, \dots, P_n . Pela aditividade de área, temos

$$A(P) = A(P_1) + \dots + A(P_n) = A(Q).$$

□

A recíproca dessa proposição corresponde ao *Teorema de Bolyai-Gerwien*, que será demonstrado na próxima seção.

4.2 Teorema de Bolyai-Gerwien

Teorema 4.2.1. *Dois polígonos são equidecomponíveis se, e somente se, possuem a mesma área.*

Esse teorema, conforme algumas fontes, está associado aos matemáticos *Farkas Bolyai*, *Paul Gerwien* e *William Wallace*, atendendo também por *Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien*. Há registros de que *Bolyai* elaborou o problema, e *Gerwien* provou em 1833. Porém acredita-se que *Wallace* já havia confirmado o resultado em 1807. Além dessas, existe também a hipótese de que *Bolyai* e *Gerwien* conseguiram mostrar o teorema de forma independente em 1833 e 1835, respectivamente.

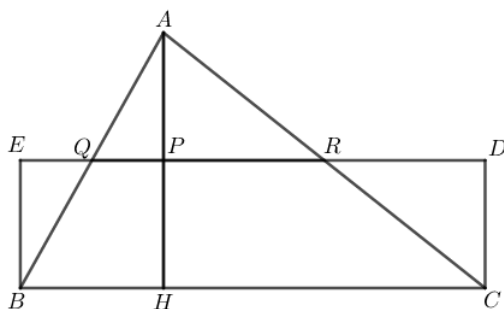
Wolfgang Farkas Bolyai (1775-1856), foi um matemático húngaro, coinventor da geometria não euclidiana, amigo de *Johan Carl Friedrich Gauss*. *William Wallace* (1768-1843), foi um matemático e astrônomo escocês que inventou o pantógrafo, além de contribuições em áreas como Álgebra, Trigonometria e Seções Cônicas.

Para demonstrar o teorema, seguiremos um procedimento utilizando o conceito de equidecomponibilidade, onde a ideia principal é mostrar que qualquer polígono é equidecomponível com um quadrado de mesma área. Partiremos do princípio de que todo polígono pode ser triangularizado, ou seja, pode ser decomposto em triângulos, conforme vimos no Capítulo 2, Teorema 2.2.7. Em seguida devemos mostrar que todo triângulo é equidecomponível com um retângulo e logo após constatar que todo retângulo é equidecomponível com um quadrado de mesma área. Com fundamento nesses resultados poderemos concluir o *Teorema de Bolyai-Gerwien*.

Vamos então considerar o fato de que todo polígono pode ser decomposto em triângulos e desenvolver alguns lemas que nos darão embasamento para a demonstração proposta.

Lema 4.2.2. *Todo triângulo é equidecomponível com um retângulo de mesma área.*

Prova. Dado um triângulo ABC, sejam BC uma base, AH a altura relativa à base BC e P o ponto médio da altura AH. Tracemos um segmento paralelo e congruente a BC, passando por P. Obtemos dessa forma, o retângulo BCDE, além disso os segmentos AB e AC intersectam DE nos pontos Q e R, nessa ordem, conforme a figura.



Note que os triângulos BEQ e APQ são retângulos, temos $AP = PH = BE$ e os ângulos AQP e BQE são opostos pelo vértice, logo os triângulos APQ e BEQ são congruentes. De modo análogo pode ser mostrado que os triângulos APR e CDR também são congruentes. Portanto, podemos concluir que o triângulo ABC que é decomposto nos polígonos BCRQ, APQ e APR e o retângulo BCDE que é formado pelos polígonos BCRQ, BEQ e CDR são equidecomponíveis. \square

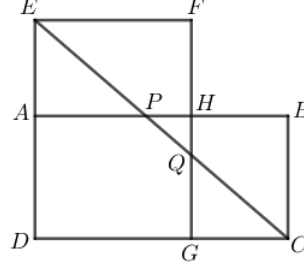
De imediato, verificamos a correspondência entre as áreas do triângulo ABC e do retângulo BCDE, empregando a aditividade e invariância da área. Vejamos

$$A(ABC) = A(APQ) + A(APR) + A(BCRQ) = A(BEQ) + A(CDR) + A(BCRQ) = A(BCDE).$$

Essa equivalência ocorre independente da escolha da base e de sua altura correspondente.

Lema 4.2.3. *Dois retângulos com áreas iguais são equidecomponíveis.*

Prova. Considere os retângulos ABCD e DEFG, com áreas iguais. Tracemos o segmento CE, gerando assim os pontos P e Q, intersecção com os lados AB e FG, respectivamente, conforme a figura.



Vamos mostrar que os dois retângulos são equidecomponíveis, utilizando semelhança e congruência de triângulos.

Podemos notar, analisando a figura, que os triângulos retângulos APE e DCE são semelhantes, pois possuem o ângulo E em comum. Dessa forma, temos

$$\frac{AP}{DC} = \frac{AE}{DE}.$$

Note que $AE = DE - AD$, assim

$$\frac{AP}{DC} = \frac{DE - AD}{DE} \implies AP = \frac{DC \cdot DE - DC \cdot AD}{DE},$$

como os retângulos ABCD e DEFG possuem a mesma área, podemos afirmar que

$$AD \cdot DC = DE \cdot DG,$$

então

$$AP = \frac{DC \cdot DE - DE \cdot DG}{DE} \implies AP = DC - DG = GC,$$

por outro lado, os triângulos retângulos APE e GCQ, possuem os ângulos C e P congruentes, pois os lados AP e GC são paralelos. Temos então

$$\frac{AE}{GQ} = \frac{AP}{GC} \implies AE = GQ,$$

consequentemente, $CQ = PE$. Podemos então, concluir que os triângulos APE e GCQ são congruentes.

Analisando agora os triângulos retângulos EFQ e BCP que são semelhantes, pois os lados EF e BP , assim como FQ e BQ são paralelos, consequentemente, os ângulos E e P , bem como C e Q são congruentes. Desse modo, temos

$$\frac{FQ}{BC} = \frac{EF}{BP} = \frac{EQ}{PC},$$

Pela figura, podemos afirmar que $EF = AP + PH$ e $BH = GC = AP$, como visto anteriormente. Temos também $BP = BH + HP$, ou seja, $BP = AP + PH$. Assim, $EF = BP$. Dessa forma

$$\frac{FQ}{BC} = \frac{EF}{BP} \implies FQ = BC,$$

em consequência desse fato, $CP = EQ$. Assim, os triângulos EFQ e BPC são congruentes.

Podemos então, decompor o retângulo $ABCD$ nos polígonos $APQGD$, BCP e QCG , ou seja

$$ABCD = APQGD + BCP + QCG = APQGD + EFQ + APE = DEFG.$$

Portanto, os retângulos $ABCD$ e $DEFG$ são equidecomponíveis. □

Lema 4.2.4. *Todo retângulo é equidecomponível com um quadrado de mesma área.*

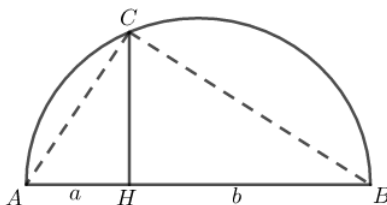
Prova. Sejam um retângulo cujos lados tem medidas a e b e um quadrado de lado l . Se os polígonos possuem áreas iguais, segue que

$$l^2 = a \cdot b \implies l = \sqrt{a \cdot b},$$

quer dizer, o lado do quadrado é igual à média geométrica das medidas dos lados do retângulo.

Podemos encontrar a medida do lado desse quadrado por meio da seguinte construção.

Consideremos um segmento AB de medida $(a + b)$, tracemos um semicírculo cujo diâmetro é $(a + b)$. Construir um segmento perpendicular a $(a + b)$ com extremidades no ponto C pertencente ao semicírculo e H pertencente ao segmento AB , tal que $AH = a$ e $HB = b$, conforme a figura



Sabemos que todo ângulo inscrito a um semicírculo é reto, então os triângulos ABC, AHC e BHC são retângulos e semelhantes. Assim, considerando os triângulos AHC e BHC, temos

$$\frac{CH}{AH} = \frac{BH}{CH} \implies HC^2 = a \cdot b \implies HC = \sqrt{a \cdot b} = l.$$

Para mostrar que um retângulo é equidecomponível com um quadrado, procedemos de maneira análoga à demonstração para os dois retângulos, lema anterior.

Lema 4.2.5. *Dois quadrados dados são equidecomponíveis com um quadrado cuja área é igual à soma das áreas dos dois quadrados iniciais.*

Esse Lema pode ser visto como o Teorema de Pitágoras.

A partir desse momento, podemos seguir com a demonstração do *Teorema de Bolyai-Gerwien*.

Teorema 4.2.6 (Bolyai-Gerwien). *Dois polígonos são equidecomponíveis se, e somente se, possuem a mesma área.*

Prova. Dados dois polígonos P e Q, equidecomponíveis, se P for decomposto pelos polígonos P_1, \dots, P_n , podemos obter o polígono Q através de um rearranjo de P_1, \dots, P_n . Então, da aditividade e invariância da área, entendemos que as áreas dos polígonos P e Q podem ser consideradas como o somatório das áreas de P_1, \dots, P_n , ou seja,

$$A(P) = A(P_1) + \dots + A(P_n) = A(Q),$$

onde $A(P), A(Q), A(P_1), \dots, A(P_n)$ representam as áreas dos polígonos mencionados.

Por outro lado, considerando dois polígonos P e Q, de áreas iguais, o polígono P, por exemplo, pode ser triangularizado. Cada triângulo obtido com a decomposição de P é equidecomponível com um retângulo (Lema 4.2.2). Consequentemente, cada retângulo é equidecomponível com um quadrado (Lema 4.2.4) e de acordo com o Lema 4.2.5, podemos combinar dois quadrados e conseguir um quadrado cuja área é igual à soma das áreas dos dois iniciais. Realizando esse procedimento com todos os possíveis quadrados da divisão do polígono, ao final alcançaremos um quadrado com área igual à do polígono introdutivo.

Esse procedimento pode ser realizado tanto para o polígono P, quanto para o polígono Q, portanto, dois polígonos com áreas iguais são equidecomponíveis. \square

O problema análogo para poliedros, em três dimensões, é conhecido como o terceiro problema de Hilbert, o qual consta em sua famosa lista composta por 23 problemas, apresentada em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris. Hilbert supôs que a resposta para o problema seria negativa. O problema foi resolvido por Max Dehn, aluno de Hilbert, e confirmou o pressuposto. A solução ficou conhecida como o *Teorema de Dehn* e esse foi o primeiro problema a ser resolvido da lista apresentada por Hilbert.

Referências Bibliográficas

- [1] Stewart, James, Cálculo: volume 1 / James Stewart; tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins; revisão técnica Helena Castro. – São Paulo: Cengage Learning, 2009.
- [2] Boyer, Carl B., História da Matemática, 2a ed. / Carl B. Boyer; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, SP: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.
- [3] Eves, Howard, Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. - Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- [4] Lima, Elon Lages, Meu professor de matemática e outras histórias, 5a edição, Coleção do professor de matemática. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1998.
- [5] Lima, Elon Lages, et al., Temas e Problemas Elementares, 2a edição, Coleção do professor de matemática. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2005.
- [6] CONTEÚDO aberto. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Shoelace_formula> Acesso em: 06 de out. de 2018.
- [7] CONTEÚDO aberto. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Measurement_of_aCircle> Acesso em: 01 de mar. de 2019.
- [8] CONTEÚDO aberto. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Pick%27s_theorem> Acesso em: 15 de mar. de 2019.
- [9] CONTEÚDO aberto. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Alexander_Pick> Acesso em: 15 de mar. de 2019.
- [10] CONTEÚDO aberto. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/WallaceBolyaiGerwien_theorem> Acesso em: 20 de mar. de 2019.

[11] CONTEÚDO aberto. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Shoelace_formula> Acesso em: 04 de maio de 2019.